

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА.
КАСАТЕЛЬНАЯ И ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ**

•

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления производных «по определению», применения производной и дифференциала.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Уравнение касательной к кривой

Уравнения касательной и нормали к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= y'_x(M_0) \cdot (x - x_0) - \text{уравнение касательной} \\x - x_0 &= -y'_x(M_0) \cdot (y - y_0) - \text{уравнение нормали.} \quad (1)\end{aligned}$$

Замечание. Каноническое уравнение прямой на плоскости Oxy имеет вид:

$Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$, то есть коэффициенты A и B не равны нулю одновременно. В случае, когда $B \neq 0$ уравнение можно записать в виде $y = kx + b$ (это будут наклонные и горизонтальные прямые); если же $B = 0$ (но тогда $A \neq 0$, так как A и B не могут быть равны нулю одновременно), уравнение можно записать в виде $x = c$ (и это будут вертикальные прямые). Поэтому в виде (1) удобно *запоминать и находить уравнение касательной и нормали* к кривой, но ответ, конечно, нужно *записывать в каноническом виде*.

Задача 1. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 3$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 9 - 3 = 6$.

$$y'(x) = 2x - 1$$

$$y'(x_0) = y'(3) = 5.$$

Уравнение касательной:

$$y - 6 = 5 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - 6 = 5x - 15 \Leftrightarrow y = 5x - 9.$$

Уравнение нормали:

$$\begin{aligned}x - 3 &= -5(y - 6) \Leftrightarrow x - 3 = -5y + 30 \Leftrightarrow x + 5y - 33 = 0 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{5}x + \frac{33}{5}.\end{aligned}$$

Ответ: уравнение касательной: $y = 5x - 9$;
уравнение нормали: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{33}{5}$.

Замечание. Напомним, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ ортогональны, если $k_1k_2 = -1$. Не забывайте проверять это, посчитав уравнение касательной и нормали (при этом k_1 и k_2 – тангенсы углов наклона этих прямых, то есть углов между положительным направлением оси Ox и прямой, взятым против часовой стрелки).

Замечание. Иногда уравнение прямой на плоскости удобнее записывать в виде $Ax + By + C = 0$, особенно когда коэффициенты в уравнениях вида $y = kx + b$ записываются в виде дробей.

В такой записи прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ортогональны, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Не забывайте проверять это, посчитав уравнение касательной и нормали.

Задача 2. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ в точке $x_0 = 3$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 9 - 3 + 2 = 8$.

$$y'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1 = x^2 - 1$$

$$y'(x_0) = y'(3) = 9 - 1 = 8.$$

Уравнение касательной:

$$y - 8 = 8 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - 8 = 8x - 24 \Leftrightarrow y = 8x - 16.$$

Уравнение нормали:

$$\begin{aligned} x - 3 &= -8(y - 8) \Leftrightarrow x - 3 = -8y + 64 \Leftrightarrow x + 8y - 67 = 0 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: уравнение касательной: $y = 8x - 16$;
уравнение нормали: $y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8}$.

Задача 3. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^{x^2}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 1$.

Найдем $y'(x)$ и $y'(M) = y'(x_0, y_0)$. Используем логарифмическую производную

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$\ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{1}{y} y'_x = \left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$y'_x = y(2x \ln x + x)$$

$$y'_x = x^{x^2} (2x \ln x + x)$$

$$y'_x(M) = 1.$$

Уравнение касательной:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x.$$

Уравнение нормали:

$$x - 1 = -1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = x$;
уравнение нормали: $y = -x + 2$.

Задача 4. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = (\sin x)^{\cos x}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 1$.

Найдем $y'(x)$ и $y'(M) = y'(x_0, y_0)$. Используем логарифмическую производную

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\cos x}$$

$$\ln y = \cos x \ln \sin x$$

$$\frac{1}{y} y'_x = \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$$

$$y'_x = y \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$$

$$y'_x = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$$

$$y'_x(M) = 1(-1 \cdot 0 + 0) = 0.$$

Уравнение касательной:

$$y - 1 = 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow y = 1.$$

Уравнение нормали:

$$x - \frac{\pi}{2} = 0 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = 1$;

уравнение нормали: $x = \frac{\pi}{2}$.

Задача 5. Найти уравнение касательной к кривой $y = e^{\frac{1}{3-x}}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение.

В этом случае $y_0 = e^{\frac{1}{3-2}} = e$.

$$y'(x) = e^{\frac{1}{3-x}} \cdot (-1)$$

$$y'(x_0) = y'(2) = -e^{\frac{1}{3-2}} = -e.$$

Уравнение касательной:

$$y - e = -e \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - e = -ex + 2e \Leftrightarrow y = -ex + 3e.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = 5x - 9$;

Задача 6. Найти уравнения касательных, проведенных к графику функции $y = 2x^2 - 3x + 2$ в точках пересечения с прямой $y = x + 2$.

Решение.

Найдем точки пересечения кривой $y = 2x^2 - 3x + 2$ и прямой $y = x + 2$, для чего решим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2x^2 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

То есть получаем две точки пересечения $M_1(0,2)$ и $M_2(2,4)$.

$$y'(x) = 4x - 3.$$

1) Найдем уравнение касательной к кривой в точке $M_1(0,2)$.

$$y'(x_0) = y'(0) = -3.$$

Уравнение касательной:

$$y - 2 = -3 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -3x \Leftrightarrow y = -3x + 2.$$

2) Найдем уравнение касательной к кривой в точке $M_2(2,4)$.

$$y'(x_0) = y'(2) = 5.$$

Уравнение касательной:

$$y - 4 = 5 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 5x - 10 \Leftrightarrow y = 5x - 6.$$

Ответ: $y = -3x + 2$ и $y = 5x - 6$.

Задача 7. Докажите, что прямая $y = 2x - 1$ не пересекает кривую $y = x^4 + 3x^2 + 2x$. Найти расстояние между ближайшими точками кривой и прямой.

Решение.

Доказать, что кривые не пересекаются, означает, что надо доказать, что не имеет решений система

$$\begin{cases} y = x^4 + 3x^2 + 2x \\ y = 2x - 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим эту систему.

$$\begin{cases} y = x^4 + 3x^2 + 2x \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x^4 + 3x^2 + 2x \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}.$$

Эта система, очевидно, не имеет решений, так как $x^4 + 3x^2$ принимает при всех x только неотрицательные значения.

Итак, прямая $y = 2x - 1$ и кривая $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не пересекаются.

Напомним, что расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0, l) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Надо найти точку $M(x, y)$, в которой величина $\rho(M, l) = \left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ будет принимать наименьшее значение. В нашем случае уравнение прямой имеет вид $-2x + y + 1 = 0$, а координаты произвольной точки M , лежащей на кривой $y = x^4 + 3x^2 + 2x$, имеют вид $M(x, x^4 + 3x^2 + 2x)$. То есть в нашем случае наименьшее значение должна принимать функция

$$\rho(x) = \left| \frac{-2x + 1 \cdot (x^4 + 3x^2 + 2x) + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{\sqrt{5}} \right| = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$\rho'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} (4x^3 + 6x).$$

$$\begin{aligned} \rho'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} (4x^3 + 6x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Получаем одну критическую точку $x = 0$.

Так как $\rho''(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} (12x^2 + 6)$ и при $x = 0$ вторая производная

$$\rho''(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} (12 \cdot 0 + 6) > 0, \text{ то } x = 0 - \text{точка минимума функции } \rho(x). \text{ А}$$

значит значение $\rho(0) = \frac{0^4 + 3 \cdot 0^2 + 1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ задает минимальное расстояние от кривой $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ до прямой $y = 2x - 1$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Задача 8. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t), a > 0 \end{cases} \quad \text{при } t = t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

Так как $t_0 = \frac{\pi}{2}$, то

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = a.$$

Далее,

$$x'_t(t) = a(1 - \cos t)$$

$$y'_t(t) = a \sin t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

$$\text{и } y'_x(t_0) = y'_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - a = 1 \cdot \left(x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \Leftrightarrow y = a + x - \frac{\pi a}{2} + a \Leftrightarrow y = x + 2a - \frac{\pi a}{2}.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$\left(x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = -1 \cdot (y - a) \Leftrightarrow x - \frac{\pi a}{2} + a = -y + a \Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi a}{2}.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = x + 2a - \frac{\pi a}{2}$;

уравнение нормали: $y = -x + \frac{\pi a}{2}$.

Задача 9. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \sin t + 1 \\ y(t) = e^{-t} \cos t + 2 \end{cases} \quad \text{при } t = t_0 = 0.$$

Решение.

Так как $t_0 = 0$, то

$$x_0 = x(0) = e^{-0} \sin 0 + 1 = 1,$$

$$y_0 = y(0) = e^{-0} \cos 0 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Далее,

$$x'_t(t) = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$y'_t(t) = -e^{-t} \cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-e^{-t}(\cos t + \sin t)}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$$

$$\text{и } y'_x(t_0) = y'_x(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 4.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x - 1) = 1 \cdot (y - 3) \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = -x + 4$;
уравнение нормали: $y = x + 2$.

Задача 10. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\cos t + \sin t) \\ y(t) = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad \text{при } t = t_0 = 0.$$

Решение.

Так как $t_0 = 0$, то

$$x_0 = x(0) = e^0(\cos 0 + \sin 0) = 1 \cdot (1 + 0) = 1,$$

$$y_0 = y(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) = 1 \cdot (1 - 0) = 1.$$

Далее,

$$x'_t(t) = e^t(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t) = 2e^t \cos t$$

$$y'_t(t) = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-2e^t \sin t}{2e^t \cos t} = -\operatorname{tg} t$$

$$\text{и } y'_x(t_0) = y'_x(0) = 0.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 1.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x - 1) = 0 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = 1$;
уравнение нормали: $x = 1$.

Задача 11. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t \operatorname{arctg} t - \ln \sqrt{1 + t^2} \end{cases} \quad \text{при } t = t_0 = 0.$$

Решение.

Так как $t_0 = 0$, то

$$x_0 = x(0) = 0,$$

$$y_0 = y(0) = 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \ln \sqrt{1+0^2} = -\ln 1 = 0.$$

Далее,

$$x'_t(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 + 1)$$

$$y'_t(t) = \operatorname{arctg} t + t \cdot \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot 2t = \operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\operatorname{arctg} t}{3(t^2+1)}$$

$$\text{и } y'_x(t_0) = y'_x(0) = 0.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 0.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x - 0) = 0 \cdot (y - 0) \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = 0$;

уравнение нормали: $x = 0$.

Задача 12. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases}$ при $t = t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Так как $t_0 = \frac{\pi}{2}$, то

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Далее,

$$x'_t(t) = \cos t - t \sin t$$

$$y'_t(t) = \sin t + t \cos t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t}$$

$$\text{и } y'_x(t_0) = y'_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\pi}{2} \cdot 0}{0 - \frac{\pi}{2} \cdot 1} = -\frac{2}{\pi}.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x - 0) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$ (или $4x + 2\pi y - \pi^2 = 0$);
уравнение нормали: $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$ (или $\pi x - 2y + \pi = 0$).

Задача 13. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \sin t \\ y(t) = e^{-t} \cos t \end{cases} \quad \text{при } t = t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Решение.

Так как $t_0 = \frac{\pi}{4}$, то

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}},$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Далее,

$$x'_t(t) = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t$$

$$y'_t(t) = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t}{-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t} = \frac{\cos t + \sin t}{\sin t - \cos t}.$$

Заметим, что $y'_x(t)$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$ не определена. В этом случае придется считать

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y'_x(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t - \cos t} = \infty,$$

так как предел числителя $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos t + \sin t) = \sqrt{2}$, а предел знаменателя $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin t - \cos t) = 0$.

Это означает, что касательная к кривой в этой точке является вертикальной прямой, проходящей через эту точку, а поэтому ее уравнение имеет вид:

$$x = x_0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Соответственно, нормаль к кривой в этой точке является горизонтальной прямой, проходящей через эту точку, и поэтому уравнение нормали будет иметь вид:

$$y = y_0 \Leftrightarrow y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Ответ: уравнение касательной $x = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$;

уравнение нормали: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Задача 14. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $x^3 + 4y^3 - 3yx^2 = 0$ в точке $M_0(-1; 1)$.

Решение.

В этом случае функция $y(x)$ задана неявно, и надо будет считать производную неявно заданной функции.

Найдем производную y'_x :

$$x^3 + 4y^3(x) - 3y(x)x^2 = 0.$$

Продифференцируем равенство по x :

$$3x^2 + 4 \cdot 3y^2 y'_x - 3y'_x x^2 - 3y \cdot 2x = 0.$$

Получили линейное уравнение относительно y'_x . Решим это уравнение относительно y'_x .

$$y'_x(12y^2 - 3x^2) = 6xy - 3x^2$$

$$y'_x = \frac{6xy - 3x^2}{12y^2 - 3x^2} = \frac{x}{2y + x}.$$

И тогда $y'_x(M_0) = \frac{-1}{2-1} = -1$.

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 1 = -1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = -x.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x + 1) = 1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = -x$;
уравнение нормали: $y = x + 2$.

Задача 15. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $2y = 1 + xy^3$ в точке $M(1; 1)$.

Решение.

В этом случае функция $y(x)$ также задана неявно, и надо будет считать производную неявно заданной функции.

Найдем производную y'_x :

$$2y(x) = 1 + xy^3(x).$$

Продифференцируем равенство по x :

$$2y'_x = 1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y'_x.$$

Получили линейное уравнение относительно y'_x . Решим это уравнение относительно y'_x .

$$y'_x(2 - 3xy^2) = y^3$$

$$y'_x = \frac{y^3}{2 - 3xy^2}.$$

Следовательно,

$$y'_x(M) = \frac{1}{2 - 3} = -1.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 1 = -1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = -x.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x + 1) = 1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = -x$;
уравнение нормали: $y = x + 2$.

Задача 16. Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей эллипсу.

Решение.

Заметим, что так как точка M_0 принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, то есть $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Функция задана неявно. Найдем y'_x .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'_x}{b^2} = 0$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y \cdot y'_x}{b^2} = 0.$$

$$1) \text{ Если } y \neq 0, \text{ то } y'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Следовательно,

$$y'_x(M_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0).$$

Умножим уравнение на $\frac{y_0}{b^2}$, получим

$$\Leftrightarrow \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1, \text{ так как точка } M_0(x_0; y_0) \text{ принадлежит эллипсу}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Заметим, что в этом случае становится «особенно хорошо» понятно, почему уравнение касательной надо преобразовывать к каноническому виду.

2) Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит эллипсу, то x_0 и y_0 не могут быть равны нулю одновременно. Действительно, если $y_0 = 0$, то $x_0 = \pm a$. Поэтому

$$y'_x(M_0) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \right) = \infty.$$

Это означает, что касательная в точке $M_0(a; 0)$ будет являться вертикальной прямой и будет задаваться уравнением $x = a$, касательная в точке $M_0(-a; 0)$ будет также являться вертикальной прямой и будет задаваться уравнением $x = -a$.

Напомним, что во всех остальных точках уравнение касательной имеет вид $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Но в точке $M_0(a; 0)$

$$x_0 = a \text{ и } y_0 = 0.$$

Попробуем подставить координаты точки $M_0(a; 0)$ в уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Получим, что $\frac{x \cdot a}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 \Leftrightarrow x = a$.

Аналогично, в точке $M_0(-a; 0)$

$$x_0 = -a \text{ и } y_0 = 0,$$

поэтому уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ в точке $M_0(-a; 0)$ превращается в уравнение $\frac{x \cdot (-a)}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{a} = 1 \Leftrightarrow x = -a$.

Следовательно, во всех точках $(x_0; y_0)$ эллипса уравнение касательной можно записать в виде

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Ответ: уравнение касательной к эллипсу имеет вид: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Задача 17. Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей параболе.

Решение.

Заметим, что так как точка M_0 принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, то есть $y_0^2 = 2px_0 \Leftrightarrow y_0^2 - 2px_0 = 0$.

В этом случае функция также задана неявно. Найдем y'_x .

$$y^2 = 2px$$

$$2y \cdot y'_x = 2p$$

$$y \cdot y'_x = p$$

1) Если $y \neq 0$, то $y'_x = \frac{p}{y}$.

Следовательно,

$$y'_x(M_0) = \frac{p}{y_0}.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Умножим уравнение на y_0 , получим

$$\Leftrightarrow yy_0 - y_0^2 = px - px_0$$

$$\Leftrightarrow yy_0 = px + px_0 + \underbrace{y_0^2 - 2px_0}_{\substack{=0, \text{ так как} \\ \text{точка } M_0(x_0; y_0) \\ \text{принадлежит параболе}}}$$

$$\Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Заметим, что в этом случае становится «особенно хорошо» понятно, почему уравнение касательной надо преобразовывать к каноническому виду.

2) Если же $y_0 = 0$, то и $x_0 = 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} y'_x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{p}{y} = 0.$$

Это означает, что касательная будет являться вертикальной прямой и будет проходить через точку $x = 0$. То есть уравнение касательной будет иметь вид $x = 0$. Но если в уравнение $yy_0 = p(x + x_0)$ подставить значения $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$, то получим уравнение $0 = px$, или (так как $p \neq 0$) $x = 0$.

Следовательно, во всех точках $(x_0; y_0)$ параболы уравнение касательной можно записать в виде

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Ответ: уравнение касательной к параболе имеет вид: $yy_0 = p(x + x_0)$.

Задача 18. Найдите, какие углы образуют с осью Ox касательные к кривой $y = x - x^2$ в точках с абсциссами

А) $x = 0$,

Б) $x = \frac{1}{2}$,

В) $x = 1$.

Решение.

Производная функции в точке $y'_x(M_0)$ равна тангенсу угла φ наклона касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке M_0 , при этом угол измеряется от положительного направления оси Ox к прямой против часовой стрелки.

В этом случае $y'(x) = 1 - 2x$, поэтому

А) при $x = 0$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Б) при $x = \frac{1}{2}$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

В) при $x = 1$

$$y'(1) = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: А) $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Б) $\varphi = 0$. В) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 19. Под каким углом кривые $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \operatorname{tg} x$ пересекают ось Ox в начале координат?

Решение.

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$y = \sin 2x$$

$$y' = 2 \cos x$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 2 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 2.$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 2, \frac{\pi}{4}.$$

Задача 20. Найти точки, в которых касательные к кривой $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ параллельны оси Ox .

Решение.

Прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллельны, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Если прямые заданы в виде $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то они будут параллельны, если $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$.

Если прямые заданы в виде $x = c_1$ и $x = c_2$, то они будут параллельны, если $c_1 \neq c_2$.

Напомним, что совпадающие прямые параллельными не являются, так как параллельные прямые не имеют общих точек, а у совпадающих прямых все точки являются общими.

В нашем случае

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x.$$

Так как касательная должна быть параллельна оси Ox , то должно быть выполнено условие

$$\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow y'(x) = 0.$$

$$12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(12x^2 + 12x - 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2.$$

И мы получаем три точки, в каждой из которых угол наклона равен нулю.

Если $x_0 = 0$, то $y_0 = 20$, и уравнение касательной имеет вид

$y - 20 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 20 \Rightarrow$ касательная параллельна оси Ox (так как с осью Ox не совпадает).

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 15$, и уравнение касательной имеет вид

$y - 15 = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 15 \Rightarrow$ касательная параллельна оси Ox (так как с осью Ox не совпадает).

Если $x_0 = -2$, то $y_0 = -12$, и уравнение касательной имеет вид

$y + 12 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -12 \Rightarrow$ касательная параллельна оси Ox (так как с осью Ox не совпадает).

Так как все касательные не совпадают с осью Ox (не задаются уравнением $y = 0$), то все они параллельны оси Ox .

Ответ: 0; 1; -2.

Задача 21. Показать, что линия $y = x^5 + 3x - 15$ во всех своих точках наклонена к оси Ox под острым углом.

Решение.

Углом между кривой и прямой в их точке пересечения называется угол между касательной к кривой, проведенной в точке пересечения, и заданной прямой.

В этом случае $y' = 5x^4 + 3$. Легко видеть, что $y' = 5x^4 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Так как тангенс угла наклона касательной равен значению производной функции в точке касания, то тангенс угла наклона касательной во всех точках будет положительным. Но если тангенс угла наклона прямой положителен, то это значит, что угол острый. Следовательно, угол наклона касательной будет острым $\forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 22. Найти углы, под которыми пересекаются линии $y = \frac{x+1}{x+2}$ и $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$.

Решение.

Углом между двумя кривыми в их точке пересечения называется угол между касательными к этим кривым, проведенными к этим кривым в точке пересечения.

Найдем точки пересечения заданных линий, для чего решим систему уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ y = \frac{x^2+4x+8}{16} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ \frac{x+1}{x+2} = \frac{x^2+4x+8}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ 16x + 16 = (x+2)(x^2+4x+8) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ 16x + 16 = x^3 + 4x^2 + 8x + 2x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ x^3 + 6x^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ x = 0 \vee x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -6 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Получили две точки пересечения кривых: $M_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $M_2\left(-6; \frac{5}{4}\right)$.

Найдем производные заданных функций.

$$y_1'(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

$$y_2'(x) = \left(\frac{x^2+4x+8}{16}\right)' = \frac{1}{16}(2x+4) = \frac{x+2}{8}.$$

Напомним, что угол между двумя прямыми принимает значения на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Если прямые образуют углы φ_1 и φ_2 с осью Ox , то для того, чтобы найти тангенс угла φ между этими прямыми, достаточно найти модуль тангенса разности этих углов:

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} \right|.$$

В точке $M_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$y_1'(0) = \frac{1}{4}$ и $y_2'(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ углы, которые образуют касательные к этим кривым в точке $M_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$ равны. Следовательно, разность этих углов равна нулю. Кривые «пересекаются под углом, равным нулю» $\Rightarrow$ кривые касаются друг друга в этой точке.

В точке $M_2\left(-6; \frac{5}{4}\right)$

$$y_1'(-6) = \frac{1}{16} \text{ и } y_2'(-6) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{32}} \right| = \left| \frac{2+16}{32-1} \right| = \frac{18}{31} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{18}{31}.$$

Ответ: $\varphi = 0$; $\varphi = \arctg \frac{18}{31}$.

Задача 23. Найти углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

Решение.

Углом между двумя кривыми в их точке пересечения называется угол между касательными к этим кривым, проведенными к этим кривым в точке пересечения.

Найдем точки пересечения заданных линий, для чего решим систему уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y^2 = 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 2 \vee x = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \neq 0 \end{cases} \vee x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Получили две точки пересечения кривых: $M_1(2; 2)$ и $M_2(2; -2)$.

Найдем производные заданных функций.

$y'_1(x)$:

$2x + 2yy'_x = 0 \Rightarrow y'_1(x) = -\frac{x}{y}$ при $y \neq 0$, заметим, что это условие выполнено, так как $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \neq 0 \end{cases}$.

$y'_2(x)$:

$2yy'_x = 2 \Rightarrow y'_2(x) = \frac{1}{y}$ при $y \neq 0$, заметим, что это условие выполнено, так как $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \neq 0 \end{cases}$.

В точке $M_1(2; 2)$

$$\begin{aligned} y'_1(M_1) = -1 \text{ и } y'_2(M_1) = \frac{1}{2} &\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} \right| = \\ &= \left| \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - 1 \cdot (\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{-2-1}{2-1} \right| = 3 \Rightarrow \varphi = \arctg 3. \end{aligned}$$

В точке $M_2(2; -2)$

$$y'_1(M_2) = 1 \text{ и } y'_2(M_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot (-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{2+1}{2-1} \right| = 3 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 3.$$

Ответ: в обеих точках кривые пересекаются под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

Дифференциал функции

Приращение $\Delta f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 задается равенством

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta f(x_0)} = \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{df(x_0)} + o(x - x_0), \text{ где}$$

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) -$$

дифференциал (главная часть приращения) функции $f(x)$ в точке x_0 .

Дифференциал функции в произвольной точке x записывается в виде

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x) = \sin^2 x$.

Решение.

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

$$df(x) = \sin 2x dx.$$

Ответ: $df(x) = \sin 2x dx$.

Пример 2. Найти дифференциал функции $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$df(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Ответ: $df(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Пример 3. Найти дифференциал функции $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$.

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \cdot (4x^3) \right) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \left(2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \left(\frac{2x\sqrt{x^4 + 1} + 2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} \right) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \frac{2x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)}{\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}. \end{aligned}$$

$$df(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx.$$

Ответ: $df(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$.

Пример 4. Найти дифференциал функции $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.

Решение.

Это показательно-степенная функция. Будем брать логарифмическую производную функции $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$$\ln y = \operatorname{arctg} x \ln(\cos x)$$

$$\frac{1}{y} y'_x = \frac{1}{1+x^2} \ln(\cos x) + \operatorname{arctg} x \frac{1}{\cos x} (-\sin x)$$

$$y'_x = y \left(\frac{1}{1+x^2} \ln(\cos x) - \operatorname{arctg} x \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$y'_x = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{1}{1+x^2} \ln(\cos x) - \operatorname{arctg} x \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$df(x) = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{1}{1+x^2} \ln(\cos x) - \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \right) dx.$$

Ответ: $df(x) = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{1}{1+x^2} \ln(\cos x) - \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \right) dx$.

Пример 5. Найти дифференциал функции $f(x) = \ln^3 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x}$.

Решение.

$f(x) = \ln^3 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x}$ – сложная функция.

Ее производная равна

$$f'_x = 3 \ln^2 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x} \cdot \frac{1}{\arcsin \sqrt[3]{x^2 - x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}}} \cdot \frac{1}{3(x^2 - x)^{\frac{2}{3}}} \cdot (2x - 1).$$

Поэтому

$$df(x) = \ln^2 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x} \cdot \frac{1}{\arcsin \sqrt[3]{x^2 - x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}}} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)^{\frac{2}{3}}} \cdot (2x - 1)dx.$$

Ответ:

$$df(x) = \ln^2 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x} \cdot \frac{1}{\arcsin \sqrt[3]{x^2 - x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}}} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)^{\frac{2}{3}}} \cdot (2x - 1)dx.$$

Пример 6. Найти дифференциал функции $f(x) = -\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ в точке $x_0 = \sqrt{5}$.

Решение.

$$\begin{aligned} f'_x &= -\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = \\ &= -\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(x+1-x+1)\sqrt{x^2-1}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x+1)-(x-1)}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому при $x_0 = \sqrt{5}$

$$f'_x(x_0) = f'_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4} \quad \text{и}$$

$$df(x_0) = \frac{1}{4} dx.$$

$$\text{Ответ: } df(x_0) = \frac{1}{4} dx.$$

Вычисление приближенных значений

Поскольку

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

где $o(x - x_0) \rightarrow 0$ при $x - x_0 \rightarrow 0$, то можно сказать, что

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Это «приближенное» равенство позволяет вычислять приближенные значения функций в «плохих» точках.

Пример 4. Вычислить приближенное значение функции $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ в точке $x = 1,03$.

Решение.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 1$. Тогда

$$f(x_0) = f(1) = 1 - 4 - 5 + 3 = -5.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 8 - 5 = -10.$$

И, следовательно,

$$f(1,03) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -5 - 10 \cdot (1,03 - 1) = -5 - 0,3 = -5,3.$$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение функции $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ в точке $x = 1,03$ на калькуляторе, то получится $f(1,03) = -5,300873 \dots$

Пример 5. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{17}$.

Решение.

В этом случае надо еще понять, какую функцию мы будем рассматривать.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Тогда условие задачи означает, что надо найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17$.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 16$. Тогда $x - x_0 = 1$ и

$$f(x_0) = f(16) = \sqrt[4]{16} = 2.$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{4(16)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{32}.$$

И, следовательно,

$$\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = 2,03 \dots \approx 2,03.$$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17$ на калькуляторе, то получится $\sqrt[4]{17} = 2,030543 \dots$

Пример 6. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{67}$.

Решение.

В этом случае надо еще понять, какую функцию мы будем рассматривать.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Тогда условие задачи означает, что надо найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x = 67$.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 64$. Тогда $x - x_0 = 3$ и

$$f(x_0) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(64) = \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{48}.$$

И, следовательно,

$$\sqrt[3]{67} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot 3 = 4 + \frac{1}{16} = 4,0625.$$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x = 67$ на калькуляторе, то получится $\sqrt[3]{67} = 4,061548 \dots$

Пример 7. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{615}$.

Решение.

В этом случае надо еще понять, какую функцию мы будем рассматривать.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Тогда условие задачи означает, что надо найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 615$.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 625$. Тогда $x - x_0 = -10$ и

$$f(x_0) = f(625) = \sqrt[4]{625} = 5.$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(625) = \frac{1}{4(625)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4 \cdot 5^3}.$$

И, следовательно,

$$\sqrt[4]{615} \approx 5 + \frac{1}{4 \cdot 5^3} \cdot (-10) = 5 - \frac{1}{2 \cdot 5^2} = 5 - 0,02 = 4,98.$$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 615$ на калькуляторе, то получится $\sqrt[4]{615} = 4,979878 \dots$

Пример 8. Вычислить приближенное значение $\sqrt{2x^2 + x + 6}$ при $x = 1,96$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 6}$.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 2$. Тогда $x - x_0 = 1,96 - 2 = -0,04$ и

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 + 6} = \sqrt{16} = 4.$$

$$f'(x) = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{8+1}{2 \cdot 4} = \frac{9}{8}.$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 1,96^2 + 1,96 + 6} &\approx 4 + \frac{9}{8} \cdot (-0,04) = 4 - \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 100} = 4 - \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 100} = \\ &= 4 - 0,045 = 3,955. \end{aligned}$$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение функции $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 6}$ при $x = 1,96$ на калькуляторе, то получится $\sqrt{2 \cdot 1,96^2 + 1,96 + 6} = 3,955148 \dots$

Пример 9. Вычислить приближенное значение $\operatorname{tg}(45^\circ 3' 20'')$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

Но тогда, во-первых, угол $45^\circ 3' 20''$ «через радианную меру угла надо перевести в числа».

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ (рад)}$$

$$3' = 3 \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 180} = \frac{\pi}{20 \cdot 180} \text{ (рад)}$$

$$20'' = 20 \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{3 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180 \cdot 180} \text{ (рад)}.$$

В качестве x_0 возьмем $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Тогда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20 \cdot 180} + \frac{\pi}{180 \cdot 180}$.

$$f(x_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ ПОЭТОМУ}$$

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2.$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20 \cdot 180} + \frac{\pi}{180 \cdot 180}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20 \cdot 180} + \frac{\pi}{180 \cdot 180}\right) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \\ &= 1 + 2\left(\frac{\pi}{20 \cdot 180} + \frac{\pi}{180 \cdot 180}\right) = 1 + \frac{\pi}{1800}\left(1 + \frac{1}{9}\right) = 1 + \frac{\pi}{1800} \cdot \frac{10}{9} = 1 + \frac{\pi}{1620} \approx \\ &\approx 1,0019. \end{aligned}$$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение функции $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20 \cdot 180} + \frac{\pi}{180 \cdot 180}$ (то есть $\operatorname{tg}(45^\circ 3' 20'')$) на калькуляторе, то получится значение $\operatorname{tg}(45^\circ 3' 20'') = 1,00194114 \dots$

Вычисление производной функции «по определению»

Пусть предложена следующая задача: «Вычислить производную некоторой функции $y(x)$ в точке x_0 ». Но функция $y(x)$ не задана одной формулой на всей области определения, в частности, справа от точки x_0 она задается с помощью одной формулы, а слева от точки x_0 — с помощью другой формулы. Как в этом случае вычислять производную функции в точке x_0 ? Приходится действовать «по определению».

Рассмотрим несколько задач на эту тему.

Задача 1. Доказать, что функция $y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна при $x = 0$. Найти $y'(0)$ и $y''(0)$.

Решение.

Напомним, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Покажем, что функция $y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

так как при $x \rightarrow 0$ дробь $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, показатель $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$, а поэтому $e^{-\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$.

Заметим, что при всех $x \neq 0$ функция $y(x)$ задана с помощью одной формулы $y(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Поэтому при $x \neq 0$ производную $y'(x)$ можно посчитать как производную сложной функции:

$$y'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(- \left(-\frac{2}{x^3} \right) \right) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Но $y'(0)$ и $y''(0)$ придется вычислять «по определению»:

$$\begin{aligned} y'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} = t \\ x = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \underset{\substack{\text{правило} \\ \text{Лопиталя}}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{t} \cdot e^t} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} = t \\ x = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{array} \right\| = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \underset{\substack{\text{правило} \\ \text{Лопиталя}}}{=} 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \underset{\substack{\text{правило} \\ \text{Лопиталя}}}{=} 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^t} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

Задача 2. Исследовать непрерывность функции $y(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

в точке $x = 0$. Найти $y'(0)$, $y'(x)$ при $x \neq 0$. Исследовать непрерывность функции $y'(x)$ в точке $x = 0$.

Решение.

Напомним, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Покажем, что функция $y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{x^2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{ограничена}} \right) = 0 = y(0).$$

Найдем $y'(0)$:

$$y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{ограничен}} \right) = 0.$$

Заметим, что при $x \neq 0$ функция $y(x)$ задана с помощью одной формулы $y(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ и поэтому производную $y'(x)$ можно посчитать как производную сложной функции:

$$y'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Проверим непрерывность функции $y'(x)$ в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{не существует}} \right) -$$

не существует, следовательно, $y'(x)$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Заметим, что в этом случае $y''(x)$ в точке $x = 0$ не существует.

Ответ: $y'(0) = 0$; $y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$; $y'(x)$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Задача 3. Исследовать непрерывность функции

$$y(x) = \begin{cases} (x+1) \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) + 2x, & x \neq -1 \\ -2, & x = -1 \end{cases}$$

в точке $x = -1$. Найти $y'(-1)$, $y'(x)$ при $x \neq -1$. Исследовать непрерывность функции $y'(x)$ в точке $x = -1$.

Решение.

Напомним, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Покажем, что функция $y(x)$ непрерывна в точке $x = -1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} y(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left((x+1) \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) + 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\underbrace{(x+1)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)}_{\text{ограничен}} + 2x \right) = -2 = y(-1).\end{aligned}$$

Найдем $y'(-1)$:

$$\begin{aligned}y'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) + 2x + 2}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) + 2 \right) = \frac{\pi^2}{4} + 2.\end{aligned}$$

Заметим, что при $x \neq -1$ функция $y(x)$ задана с помощью одной формулы $y(x) = (x+1) \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) + 2x$ и поэтому производную $y'(x)$ можно посчитать как производную сложной функции:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) + (x+1) \cdot 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x+1} \right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) + 2 = \\ &= \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) - 2(x+1) \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2 + 1} + 2.\end{aligned}$$

Проверим непрерывность функции $y'(x)$ в точке $x = -1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} y'(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right) - 2(x+1) \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2 + 1} + 2 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\underbrace{\operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)}_{\rightarrow \frac{\pi^2}{4}} - \underbrace{2(x+1)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+1} \right)}_{\text{ограничен}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2 + 1}}_{\rightarrow 1} + 2 \right) = \frac{\pi^2}{4} + 2.\end{aligned}$$

Но $y'(-1) = \frac{\pi^2}{4} + 2$ (см. выше).

Следовательно, $y'(x)$ является непрерывной в точке $x = -1$. Заметим, что тогда можно попробовать найти $y''(x)$ в точке $x = -1$.

Ответ: $y'(-1) = \frac{\pi^2}{4} + 2$; $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны в точке $x = -1$.