МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ С ПОЛНЫМ ИССЛЕДОВАНИЕМ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов химических специальностей

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок, создаваемых на основе требований нового учебного плана – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $\boldsymbol{y = f(x)}$ С ПОЛНЫМ ИССЛЕДОВАНИЕМ

В этом параграфе речь пойдет о построении графика функции $y = f(x)$ с полным исследованием. Чуть позже приведем план, который позволит осуществить это построение (и будет служить пояснением того, что же является этим построением).

Сначала напомним некоторые определения и теоремы (всюду предполагается, что производные нужного порядка существуют).

Теорема. Если $f'(x) > 0\ \forall x \in < a, b >$, то $y = f(x)$ возрастает на всем промежутке $< a, b >$.

Если же $f'(x) < 0\ \forall x \in < a, b >$, то $y = f(x)$ убывает на всем промежутке $< a, b >$.

Определение. Точку $x = c$ назовем точкой ***локального максимума*** функции $y = f(x)$, если $\exists\ (a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) \leq f(c)$. Точку $x = c$ назовем точкой ***локального минимума*** функции $y = f(x)$, если $\exists\ (a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$.

Теорема. Если $x = c$ – точка локального экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема.

1) Если $f'(c) = 0$ и $\exists\ (a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $f'(x) > 0\ \forall x \in (a; c)$, $f'(x) < 0\ \forall x \in (c; b)$, то $x = c$ – точка локального максимума функции $y = f(x)$.

2) Если $f'(c) = 0$ и $\exists\ (a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $f'(x) < 0\ \forall x \in (a; c)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in (c; b)$, то $x = c$ – точка локального минимума функции $y = f(x)$.

Теорема. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) > 0$, то $x = c$ – точка локального минимума функции $y = f(x)$. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) < 0$, то $x = c$ – точка локального максимума функции $y = f(x)$.

Определение. Будем говорить, что

1) функция ***выпукла вверх*** на промежутке $< a, b >$, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке этого промежутка;

2) функция ***выпукла вниз*** на промежутке $< a, b >$, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке этого промежутка.

Определение. Точку, в которой функция меняет свою выпуклость, назовем ***точкой перегиба***.

Теорема. Если $f''(x) > 0\ \forall x \in < a, b >$, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на промежутке $< a, b >$. Если $f''(x) < 0\ \forall x \in < a, b >$, то функция $y = f(x)$ выпукла вверх на промежутке $< a, b >$.

Определение. Предположим, что функция $y = f(x)$ не определена при $x = a$. Если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$) и (или) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$), то назовем прямую $x = a$ ***вертикальной асимптотой*** для функции $y = f(x)$.

Определение. Прямую $y = k_+ x + b_+$ назовем ***наклонной асимптотой для графика функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ при $\boldsymbol{x \to +\infty}$,*** если выполняется условие

$$\lim_{x \to +\infty} \big((k_+ x + b_+) - f(x)\big) = 0.$$

Прямую $y = k_- x + b_-$ назовем ***наклонной асимптотой для графика функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ при $\boldsymbol{x \to -\infty}$***, если выполняется условие

$$\lim_{x \to -\infty} \big((k_- x + b_-) - f(x)\big) = 0.$$

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонные асимптоты $y = k_+ x + b_+$ и $y = k_- x + b_-$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

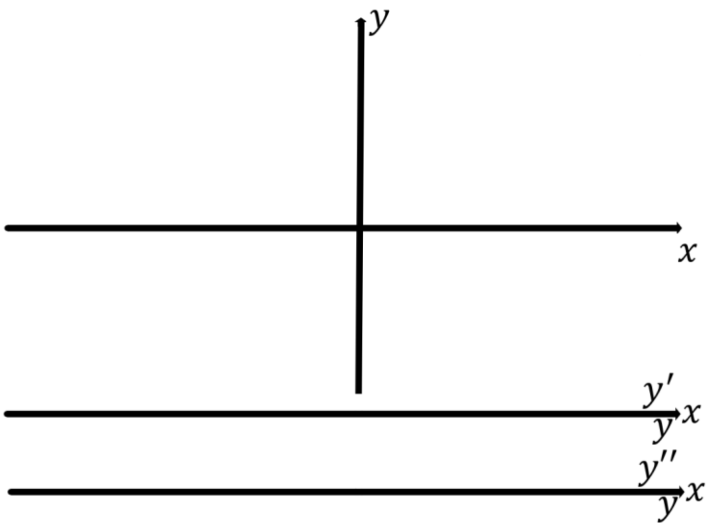
$$k_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, b_+ = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_+ x)$$

$$k_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, b_- = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_- x).$$

Замечание. В каждом случае (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$) должны существовать оба конечных предела. Если хотя бы один конечный предел не существует, то соответствующей наклонной асимптоты у графика функции нет.

Замечание. Если в уравнении наклонной асимптоты получается $k = 0$, то асимптота, естественно, будет горизонтальной.

Перед началом построения графика функции $y = f(x)$ лучше сразу подготовить место, куда мы будем заносить всю получаемую в дальнейшем информацию о поведении функции, то есть подготовить следующую «картинку»:



Здесь важно то, что все три оси Ox являются копиями друг друга и располагаются так, что одинаковые значения x находятся строго друг под другом. Это очень упрощает анализ «картинки».

План исследования и построения графика функции $y = y(x)$

1) Найдем область определения $\left(D_{y(x)}\right)$ функции $y = y(x)$. Исследуем четность-нечетность, периодичность функции, возможно, область значений функции (или хотя бы знак функции на различных промежутках).

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

3) Если точка $x = a$ является точкой разрыва функции, то посчитаем $\lim\limits_{x\to a+0} y(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} y(x)$.

4) Посчитаем $y'(x)$ и $y''(x)$.

А) Найдем корни уравнения $y'(x) = 0$ и решения неравенств $y'(x) > 0$ и $y'(x) < 0$ (это позволит найти локальные экстремумы и промежутки возрастания-убывания функции $y = y(x)$).

Б) Найдем корни уравнения $y''(x) = 0$ и решения неравенств $y''(x) > 0$ и $y''(x) < 0$ (это позволит найти точки перегиба, исследовать выпуклость).

5) Найдем наклонные асимптоты $y = k_+x + b_+$ и $y = k_-x + b_-$. Для этого посчитаем

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}\,, b_+ = \lim_{x\to+\infty}(y(x) - k_+x)$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x}\,, b_- = \lim_{x\to-\infty}(y(x) - k_-x).$$

6) Если в п.5 при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) не существует наклонной асимптоты, то бывает полезно найти $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} y'(x)$, чтобы оценить «предельный наклон касательной к графику функции $y = y(x)$» при $x \to \pm\infty$.

Рассмотрим конкретные примеры, на которых подробно разберем содержание каждого пункта плана исследования.

Пример 1. Построить график функции $y = x^4 - 2x^2$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями Ox под ней.

1) Функция $y = x^4 - 2x^2$ является многочленом. Ее область определения – вся действительная ось $\left(D_{y(x)} = \mathbb{R}\right)$.

Заметим, что функция является четной, то есть ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому у нас есть два варианта исследования.

а) Рассматривать функцию на всей оси, используя четность в качестве проверки по мере построения графика.

б) Построить график функции только при $x \geq 0$, а потом сделать симметрию графика относительно оси Oy, внимательно оценив поведение графика в правой полуокрестности нуля.

Мы будем исследовать функцию на всей оси, чтобы в «более явном виде» получить полное исследование.

2) Точки пересечения с координатными осями.

При $x = 0$ получаем $y = 0$.

При $y = 0$ получаем уравнение $x^4 - 2x^2 = 0$, корни которого $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$.

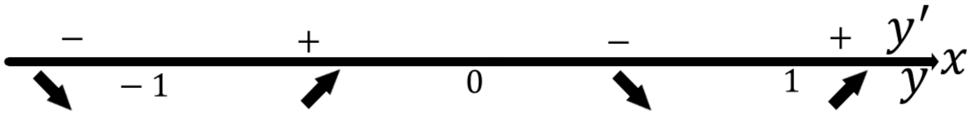
Следовательно, точки пересечения графика функции с координатными осями имеют координаты $(0; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$ и $(-\sqrt{2}; 0)$. Отметим их на нашей «картинке» в системе координат Oxy. Заметим, что точки пересечения с координатными осями симметричны относительно оси Oy (четность!).

3) Так как функция определена на $\mathbb{R}$, то вертикальных асимптот нет.

4) Посчитаем и проанализируем $y'(x)$ и $y''(x)$.

А) $y'(x) = 4x^3 - 4x$.

Решим уравнение $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$. Решение неравенств относительно $y'(x)$ методом интервалов позволяет получить следующую «картинку»:



Легко посчитать координаты локальных экстремумов:

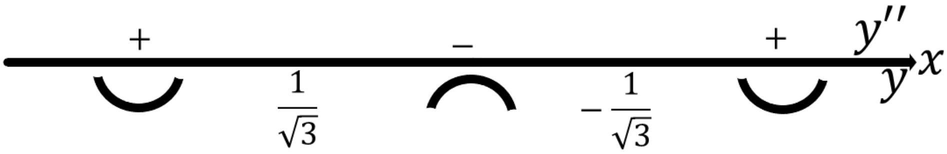
$(x_{min}; y_{min}) = (-1; -1)$, $(x_{min}; y_{min}) = (1; -1)$, $(x_{max}; y_{max}) = (0; 0)$.

Заметим, что точки локальных экстремумов также симметричны относительно оси Oy (четность!).

Б) $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Определив знак $y''(x)$ на каждом промежутке, получаем «картинку»:



Найдем координаты точек перегиба (симметричны относительно оси Oy – четность!): $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}$. Отметим в системе координат Oxy точки перегиба: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{9}\right)$.

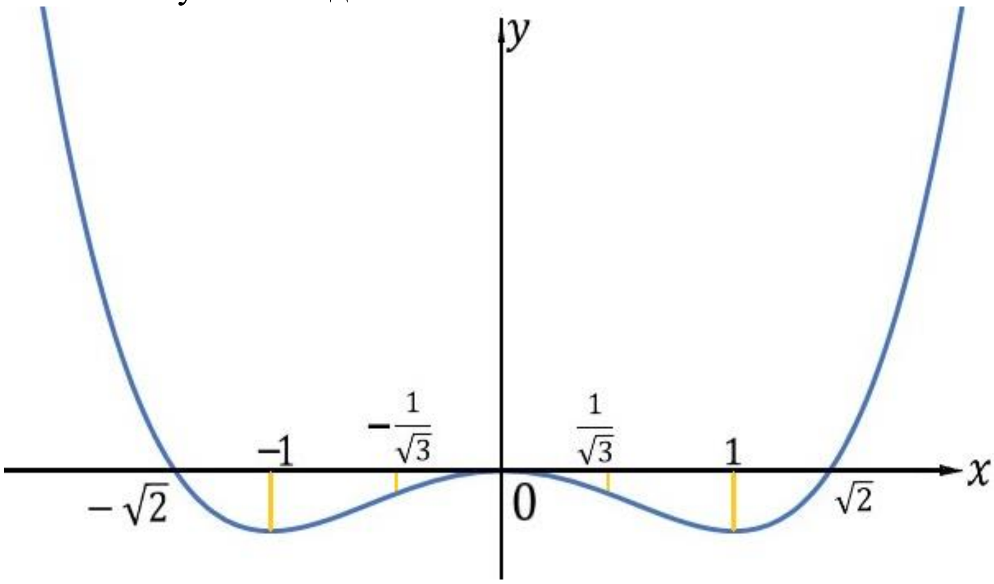
5) Заметим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 2x^2}{x} = \infty.$$

Поэтому наклонных асимптот у графика нашей функции нет.

6) Так как $\lim_{x\to\pm\infty} y'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (4x^3 - 4x) = \infty$, то тангенс угла наклона касательных стремится к бесконечности.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локальных экстремумов, точки перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$$\boldsymbol{y = x^4 - 2x^2.}$$

Пример 2. Построить график функции $\boldsymbol{y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}$ с полным исследованием.

Вновь заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Функция $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ является рациональной и определена при всех x, при которых знаменатель дроби не равен нулю. Следовательно, область определения функции $D_{y(x)} = \{x \epsilon \mathbb{R}, x \neq 1\}$. В системе координат прямую $x = 1$ обозначим пунктиром.

Заметим, что функция не является четной либо нечетной (говорят еще, что она является функцией общего вида).

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

$x = 0 \Rightarrow y = 1.$

$$y = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Точки с координатами $(0; 1)$ и $(-1; 0)$ отметим в системе координат.

3) Проанализируем поведение нашей функции в окрестности точки $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1+0} y(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0_+}\right] = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 1-0} y(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0_+}\right] = +\infty.$$

Замечание. Запись $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{2}{0_+}\right]$ будет у нас означать, что при $x\to 1+0$ (то есть аргумент x стремится к 1 справа) числитель дроби стремится к 2, а знаменатель стремится к 0, оставаясь при этом положительным. Дробь при этом, очевидно, стремится к $+\infty$.

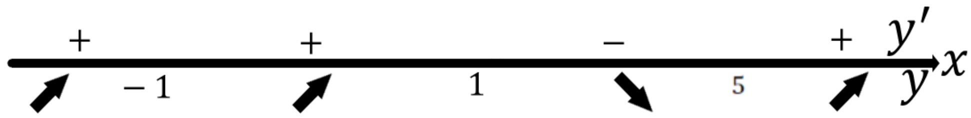
Замечание. В начале обучения в этом случае бывает полезно отметить этот факт в системе координат следующим образом: поставить «очень рядом» с пунктиром $x=1$ левее и правее в самом верху нарисованной системы координат две точки, что будет служить подсказкой в последствии при построении графика.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$$y'(x)=\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)^3\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2(3(x-1)-2(x+1)}{(x-1)^3}=$$
$$=\frac{(x+1^2(3x-3-2x-2)}{(x-1^3}=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Итак, $y'(x)=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$. Уравнение $y'=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=5$, поэтому получаем «картинку», проанализировав знаки $y'(x)$ методом интервалов.



Из картинки сразу следует, что при $x=-1$ локального экстремума нет, а при $x=5$ функция имеет локальный минимум. Найдем вторую координату локального минимума: $y_{min}=\frac{(5+1)^3}{(5-1)^2}=\frac{6\cdot 6\cdot 6}{4\cdot 4}=\frac{27}{2}$. Отметим точку $\left(5;\frac{27}{2}\right)$ локального минимума в системе координат.

Б) Найдем вторую производную.

$$y''=\left(\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\right)'=\frac{(2(x+1)(x-5)+(x+1)^2)(x-1)^3-(x+1)^2(x-5)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$
$$=\frac{(x+1)(x-1)(2(x-5)+x+1)-3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)(x-1)(3x-9)-3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{3(x+1)(x^2-4x+3-(x^2-4x-5))}{(x-1)^4}=\frac{3\cdot(x+1)\cdot 8}{(x-1)^4}=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

Итак, $y''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. $y''=0 \Leftrightarrow x=-1$. Проанализируем знаки $y''(x)$ методом интервалов и получим «картинку»:

Из «картинки» видно, что при $x=-1$ функция имеет точку перегиба. Найдем ее вторую координату: $x=-1 \Rightarrow y=0$. Отметим точку перегиба в системе координат (она уже отмечена как точка пересечения с координатными осями).

5) Найдем уравнения наклонных асимптот.

Замечание. Иногда при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ пределы для (k_+, k_-) и для (b_+, b_-) получаются равными. Это означает, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ получается одна и та же асимптота, и оба предела можно считать одновременно.

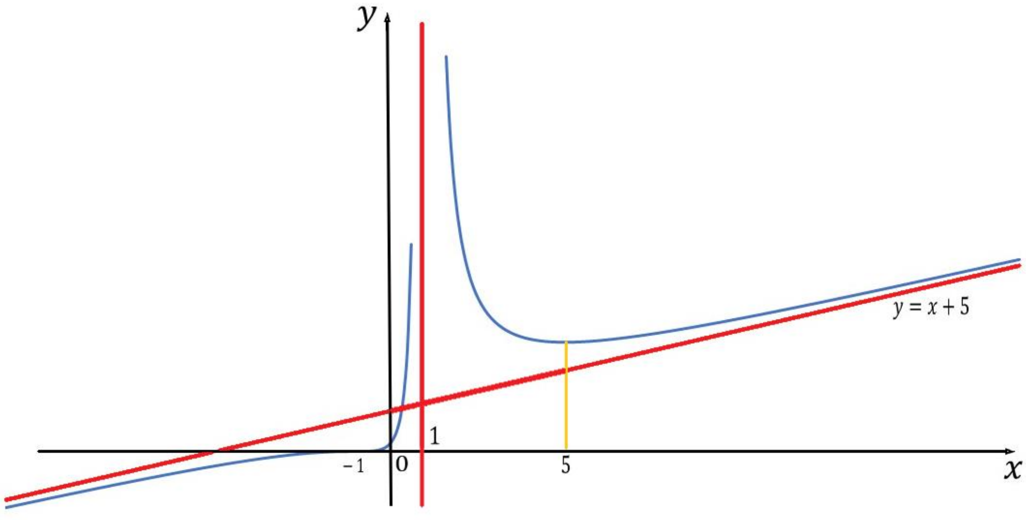
$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1.$$

$$b_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - k_\pm x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2} = 5.$$

Это означает, что прямая $y=x+5$ является наклонной асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локальных экстремумов, точки перегиба, пунктиром отмечены вертикальная и наклонная асимптоты. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и выпуклости графика на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$$\boldsymbol{y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}$$

Пример 3. Построить график функции $y = x^3 + 3|x|$ с полным исследованием.

Заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Функция $y = x^3 + 3|x|$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и является функцией общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

При $x \geq 0$ получаем, что $y = x^3 + 3x$. Поэтому

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$.

$y = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Следовательно, при $x \geq 0$ будет только одна точка пересечения с осями координат – $(0; 0)$.

При $x < 0$ получаем, что $y = x^3 - 3x$. Поэтому

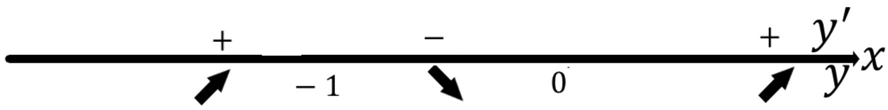
$y = 0 \;\Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$. Следовательно, при $x < 0$ тоже будет одна точка пересечения с осями координат: $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$.

Отметим эти точки в приготовленной системе координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Найдем и проанализируем первую производную. При $x \geq 0$ производная функции $y'(x) = 3x^2 + 3$. Очевидно, что $y'(x) > 0\ \forall x \geq 0$, поэтому при $x \in [0; +\infty)$ наша функция возрастает.

При $x < 0$ производная $y'(x) = 3x^2 - 3$. Заметим, что $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \Leftrightarrow\; x = -1$. Проанализировав знак $y'(x)$ на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, получаем «картинку» для первой производной.



Из «картинки» сразу получаем, что точка $x = -1$ – точка локального максимума, а точка $x = 0$ – точка локального минимума. Посчитав вторую координату, отмечаем в системе координат точки $(-1; 2)$ (локальный максимум) и $(0; 0)$ (локальный минимум).

Посчитаем вторую производную. При $x \geq 0$ вторая производная $y''(x) = 6x$. Поэтому $y''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Заметим, что $y''(x) > 0\ \forall x > 0$, следовательно, при $x > 0$ наша функция выпукла вниз.

Аналогично, при $x < 0$ вторая производная $y''(x) = 6x < 0\ \forall x < 0$, следовательно, при $x < 0$ наша функция выпукла вверх.

Получаем «картинку»:

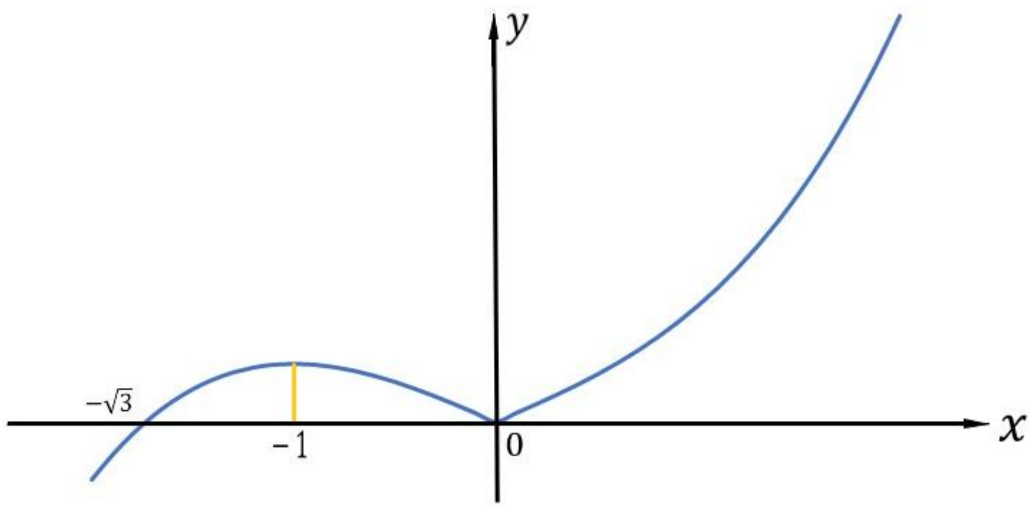
Отсюда сразу следует, что точка $(0; 0)$ является точкой перегиба.

5) Заметим, что

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3|x|}{x} = \infty,$$

поэтому наклонных асимптот у графика нет.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локальных экстремумов, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и выпуклости графика на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$\boldsymbol{y = x^3 + 3|x|}$

Пример 4. Построить график функции $\boldsymbol{y = e^{2x-x^2}}$ с полным исследованием.

Заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Функция $y = e^{2x-x^2}$ является показательной, определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и является функцией общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

Так как показательная функция принимает только положительные значения, то точек пересечения с осью Ox не будет, более того, график функции целиком будет лежать в верхней полуплоскости.

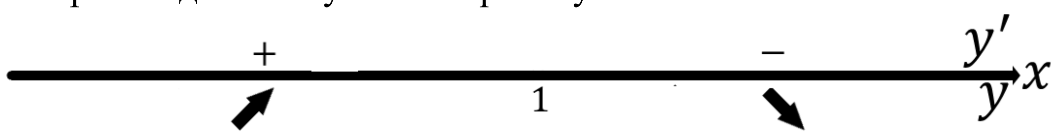
При $x = 0$ получаем, что $y = 1$. Точку $(0; 1)$ отметим в системе координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Найдем и проанализируем первую производную.

$$y'(x) = \left(e^{2x-x^2}\right)' = (2-2x)e^{2x-x^2}.$$

Заметим, что $y'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Проанализировав знак первой производной получаем «картинку».



Из «картинки» сразу получаем, что точка $x = 1$ – точка локального максимума. Поэтому точка с координатами $(1; e)$ – точка графика, в которой у функции есть локальный максимум (отмечаем ее в приготовленной системе координат).

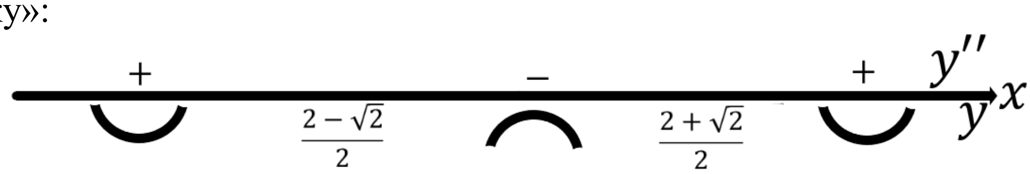
Найдем и проанализируем вторую производную.

$$y'' = (2-2x)^2 e^{2x-x^2} + (-2)e^{2x-x^2} =$$
$$= e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 4 - 2) = e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 2).$$

Далее,

$y''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Так как показательная функция принимает только положительные значения, то знак второй производной будет определяться только знаком квадратного трехчлена $4x^2 - 8x + 2$, и для второй производной мы получаем «картинку»:



Таким образом получаем, что в точках графика функции с абсциссами $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ будут находиться точки перегиба. Нужно посчитать вторую координату этих точек. Сделаем это так. Сначала напомним, что абсциссы точек перегиба удовлетворяют уравнению

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2x - x^2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, ординаты этих точек равны: $y = e^{2x-x^2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Точки перегиба с координатами $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$ и $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$ отметим в подготовленной системе координат.

Замечание. Корни квадратных уравнений иногда (как в данном случае) бывает полезно записывать в следующем виде: $x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда сразу становится видно, что они симметричны относительно точки $x = 1$ и находятся на расстоянии ≈ 0.7 от нее.

5) Найдем наклонные асимптоты. Заметим, что

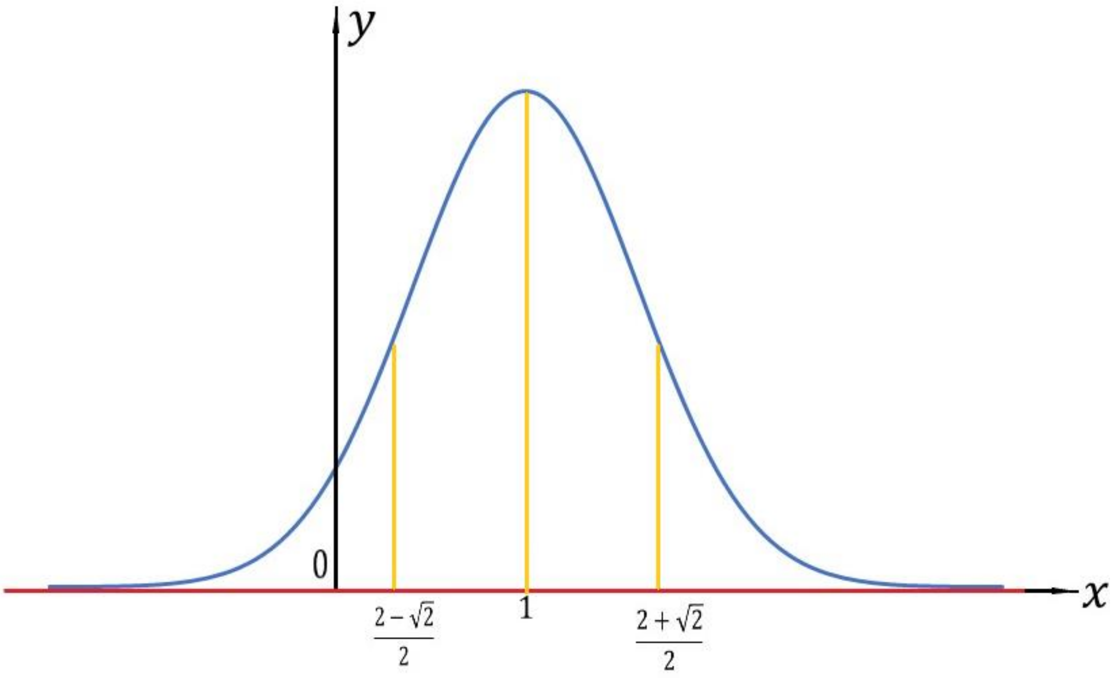
$$k_+ = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x-x^2}}{x} = 0.$$

(так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(e^{2x-x^2}\right) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \infty$.)

$$b_+ = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{2x-x^2} - 0\cdot x\right) = 0.$$

Аналогично считаем такие же пределы при $x \to -\infty$. Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой для графика этой функции при $x \to \pm\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального максимума, точки перегиба, горизонтальная асимптота. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и выпуклости графика на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$$\boldsymbol{y = e^{2x-x^2}}$$

Заметим, что график этой функции симметричен относительно прямой $x = 1$ (это легко доказать, сделав замену $x' = x - 1$ и получив четную функцию относительно аргумента x').

Пример 5. Построить график функции $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ с полным исследованием.

Заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ является $D_{y(x)} = (0; +\infty)$. Функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. Поскольку функция определена только при $x > 0$, то точек пересечения с осью Oy не будет. При $y = 0$ получаем, что $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Если $x = 1$, то $y = 0$. Точку $(1; 0)$ отметим в системе координат.

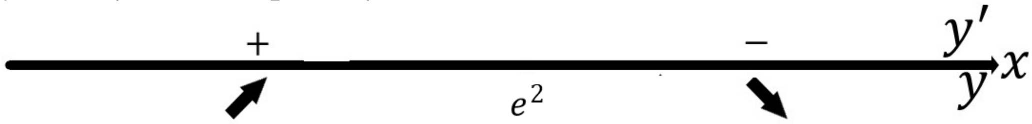
3) Так как функция не определена при $x = 0$, то найдем предел $\lim\limits_{x\to 0+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{-\infty}{0_+}\right] = -\infty$ (мы уже предлагали в таком случае чуть правее оси Oy в нижней части системы координат поставить точку).

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Итак, $y' = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, тогда $y' = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$. Анализируем знак y', получаем «картинку»



Следовательно, при $x = e^2$ функция имеет локальный максимум. Посчитаем ординату точки локального максимума: $y = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e}$. Точку $\left(e^2; \frac{2}{e}\right)$ отметим в системе координат.

Б) Найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^{3/2} - 3x^{1/2}(2-\ln x)}{4x^3} = \frac{-2\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(2-\ln x)}{4x^3} =$$

$$= \frac{-2-6+3\ln x}{4x^2\sqrt{x}} = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Итак, $y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$. Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 3\ln x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = e^{8/3}$. Анализируем знак y'', получаем «картинку»

Следовательно, при $x = e^{8/3}$ график функции имеет точку перегиба. Ордината этой точки равна $y = \frac{\ln e^{8/3}}{\sqrt{e^{8/3}}} = \frac{8}{3e^{4/3}}$. Точку перегиба $\left(e^{8/3}; \frac{8}{3e^{4/3}}\right)$ отметим в системе координат.

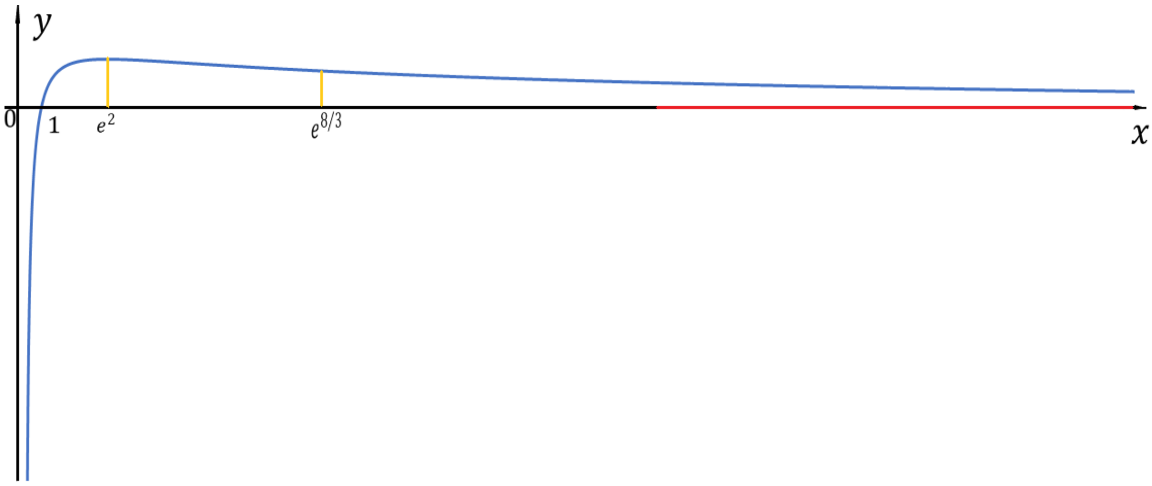
5) Найдем уравнение наклонной асимптоты. При подсчете пределов будем использовать правило Лопиталя – Бернулли.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x\sqrt{x}} = 0$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Следовательно, прямая $y = 0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой для графика функции при $x \to +\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального максимума, точки перегиба, вертикальная и горизонтальная асимптоты. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Пример 6. Построить график функции $y = x + \operatorname{arctg} x$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Область определения этой функции $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$. Функция $y = x + \operatorname{arctg} x$ является нечетной, так как является суммой двух нечетных функций $y = x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.

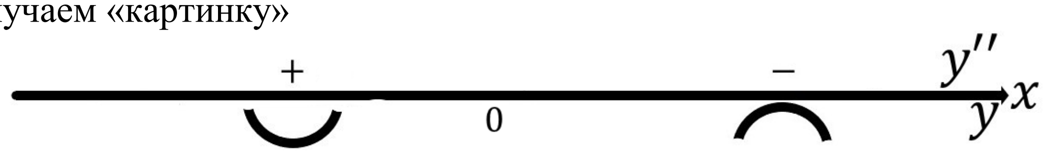
2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. Очевидно, что при $x = 0$ функция принимает значение $y = 0$. Если же $y = 0$, то относительно переменной x получаем уравнение $x + \operatorname{arctg} x = 0$. Значение $x = 0$, конечно же, является корнем этого уравнения. Но, может быть, есть и другие? На этом примере мы покажем, что не надо торопиться решать полученное непростое уравнение, так как ответ на вопрос о пересечении графика с координатными осями в дальнейшем будет получен гораздо проще. Точку (0;0) отметим в системе координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную. $y' = 1 + \frac{1}{1+x^2}$. Заметим, что $y' > 0$ $\forall x \in (-\infty; +\infty)$. Это означает, во-первых, что $f(x)$ всюду возрастает, а во-вторых, что точка пересечения с Ox только одна (как хорошо, что мы не пытались искать другие!).

Б) Найдем вторую производную. $y'' = (1 + (1 + x^2)^{-1})' = -(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Анализируем знак y'' и получаем «картинку»



5) Найдем уравнения наклонных асимптот.

$$k_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\operatorname{arctg}x}{x} = 1$$

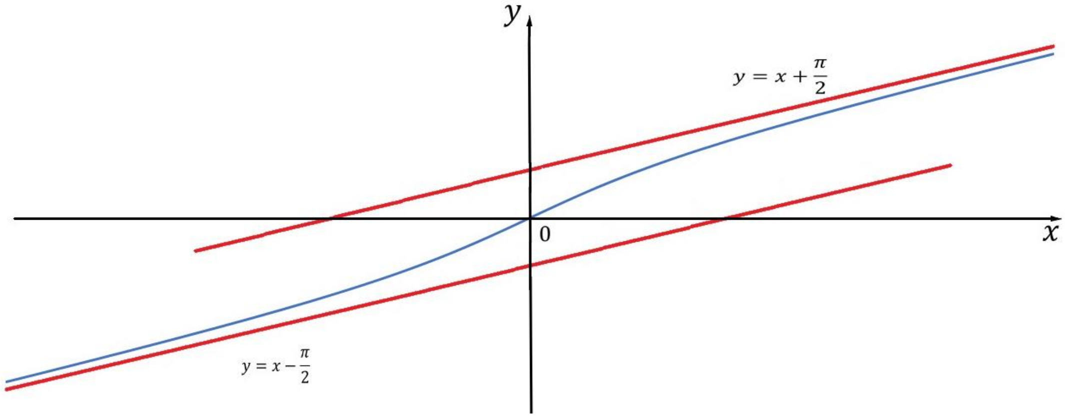
Напомним, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x = -\frac{\pi}{2}$.

$$b_{+} = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_{+}x) = \lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{arctg}x - x) = \frac{\pi}{2}$$

$$b_{-} = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_{-}x) = \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{arctg}x - x) = -\frac{\pi}{2}$$

Итак, получаем асимптоту $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$ и асимптоту $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$. Нарисуем эти асимптоты в системе координат пунктиром.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$$\boldsymbol{y = x + \operatorname{arctg}x}$$

Замечание. Напомним, что функция $y = x + \operatorname{arctg}x$ является нечетной. Поэтому мы могли построить часть графика этой функции при $x \geq 0$, а затем сделать симметрию относительно начала координат. Обратите внимание на то, как при этой симметрии преобразовывается асимптота.

Пример 7. Построить график функции $y = xe^{1-x}$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = xe^{1-x}$ является $D_{f(x)} = (-\infty;+\infty)$. Функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. $y = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Поэтому точка $(0;0)$ – единственная точка пересечения графика функции с координатными осями.

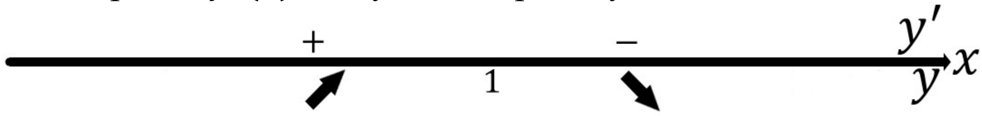
3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$$y' = (xe^{1-x})' = e^{1-x} + xe^{1-x}(-1) = (1-x)e^{1-x}.$$

Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, так как $e^{1-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Проанализировав $y'(x)$, получим «картинку»



Тогда $x_{max} = 1 \Rightarrow y_{max} = 1 \cdot e^0 = 1 \Rightarrow (1; 1)$ – точка локального максимума.

Б) Найдем вторую производную.

$$y'' = \left((1-x)e^{1-x}\right)' = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x)e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(x-2).$$

Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Анализируем знак y'' и получаем «картинку»

Тогда $x_{\text{перегиба}} = 2 \Rightarrow y_{\text{перегиба}} = 2e^{-1} \Rightarrow (2; 2e^{-1})$ – точка перегиба.

5) Найдем уравнения наклонных асимптот.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = 0$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_+x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e\cdot x}{e^x} = 0$$

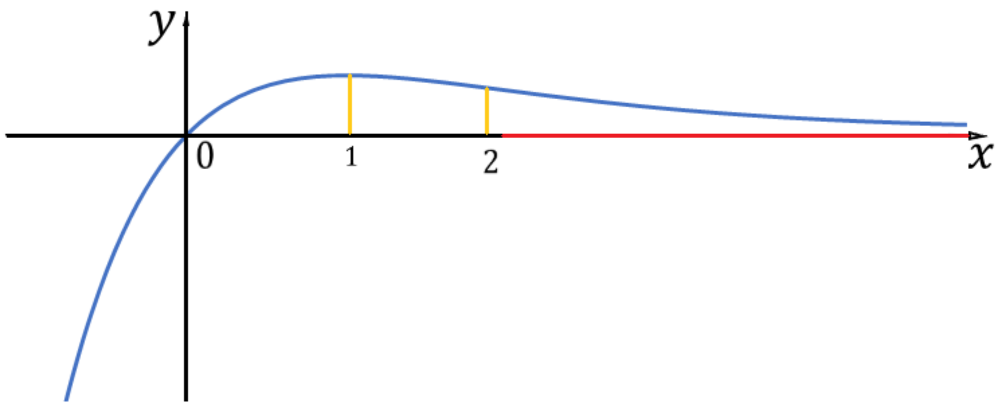
(воспользовались правилом Лопиталя – Бернулли). Таким образом, $y = 0$ – асимптота при $x \to +\infty$.

Далее,

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ наклонной асимптоты нет.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального максимума, точка перегиба, горизонтальная асимптота. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$\boldsymbol{y = xe^{1-x}}$

Пример 8. Построить график функции $y = \sin x$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

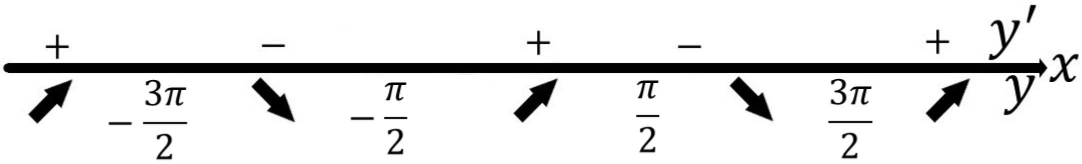
1) Областью определения функции $y = \sin x$ является $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$. Функция является нечетной и периодической с наименьшим периодом 2π. Построим график на $[0; \pi]$, затем сделаем симметрию относительно начала координат (получим график функции на $[-\pi; \pi]$), а затем периодически продолжим на всю ось. Получим весь график функции $y = \sin x$.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. $y = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[0; \pi]$ принадлежат только точки $x = 0$ и $x = \pi$. Таким образом, при $x \in [0; \pi]$ есть две точки пересечения графика с координатными осями: $(0; 0)$ и $(\pi; 0)$.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

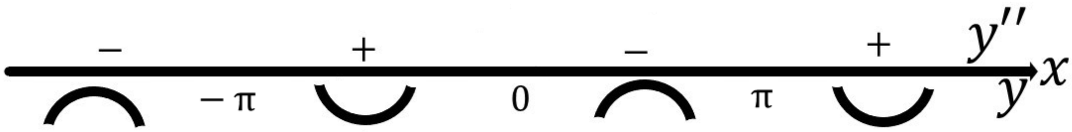
4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную. $y' = (\sin x)' = \cos x$. Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[0; \pi]$ принадлежит только точка $x = \frac{\pi}{2}$. Проанализировав $y'(x)$, получим «картинку»

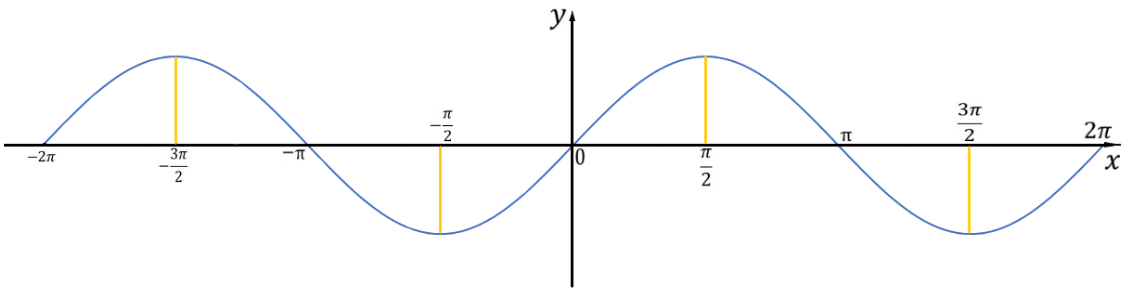


Тогда $x_{max} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_{max} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ – точка локального максимума на отрезке $[0; \pi]$.

Б) Найдем вторую производную. $y'' = -\sin x$. Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[0; \pi]$ принадлежат только точки $x = 0$ и $x = \pi$. Таким образом, на $[0; \pi]$ есть две точки перегиба: $(0; 0)$ и $(\pi; 0)$. Кроме того, $y'' = -\sin x < 0$ при $x \in [0; \pi]$, поэтому график $y = \sin x$ является выпуклым вверх на этом промежутке.



Итак, в системе координат при $x \in [0; \pi]$ строим график функции $y = \sin x$. Делаем центральную симметрию и получаем график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. При этом получаем, что на $[-\pi; 0]$ функция выпукла вниз, точка $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ является точкой локального минимума, а точка $(-\pi; 0)$ будет точкой перегиба. Продолжаем график периодически и получаем график функции $y = \sin x$ на всей действительной оси.



$$y = \sin x$$

Пример 9. Построить график функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ является $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$. Функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями.

$x = 0 \Leftrightarrow y = 0$; $y = 0 \Leftrightarrow (x-5)\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 0$.

Следовательно, $(0; 0)$ и $(5; 0)$ – точки пересечения графика с осями координат.

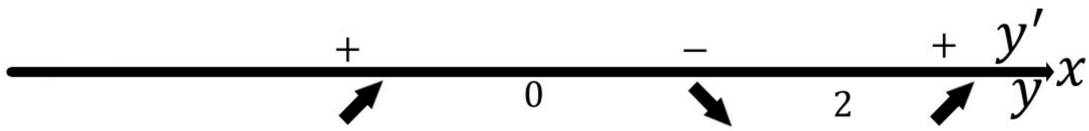
3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$y' = \left((x-5)x^{2/3}\right)' = x^{2/3} + (x-5)\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3} = \frac{3x+2x-10}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$

Итак, $y' = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$. Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Проанализировав $y'(x)$, получим «картинку»



Сразу видно, что при $x = 2$ будет точка локального минимума, причем, $x_{min} = 2 \Rightarrow y_{min} = -3\cdot\sqrt[3]{4} \Rightarrow (2; -3\cdot\sqrt[3]{4})$ – точка локального минимума функции.

Кроме того, мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда сама функция в некоторой точке (в данном случае $x = 0$) определена, а ее производная – не определена. Что это значит?

Найдем

$$\lim_{x\to 0+0} y'(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{-10}{0_+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} y'(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{-10}{0_-}\right] = +\infty$$

Это означает, что при $x \to 0$ тангенс угла наклона касательной стремится к ∞, то есть при $x = 0$ у кривой есть вертикальная касательная $x = 0$.

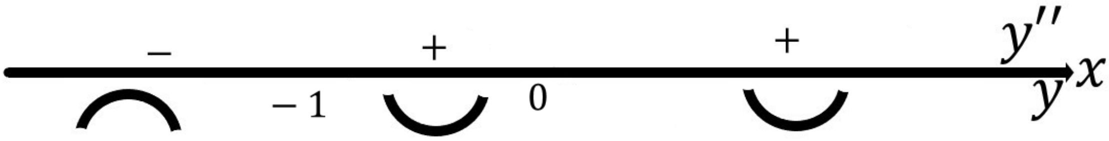
Кроме того, при $x = 0$ у кривой будет точка локального максимума (это видно из «картинки» для $y'(x)$. При этом, $x_{max} = 0 \Rightarrow y_{max} = 0 \Rightarrow (0;0)$ – ее координаты.

Б) Найдем вторую производную.

$$y'' = \frac{5}{3}\cdot\left((x-2)x^{-1/3}\right)' = \frac{5}{3}\cdot\left(x^{-1/3} + (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}\right) =$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x-2}{3x\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{5}{3}\cdot\frac{3x-x+2}{3x\sqrt[3]{x}} = \frac{10}{9}\cdot\frac{x+1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Анализируем знак y'' и получаем «картинку».



Из «картинки» видно, что при $x = -1$ у графика функции будет точка перегиба. Причем, $x_{\text{перегиба}} = -1 \Rightarrow y_{\text{перегиба}} = -6 \Rightarrow (-1;-6)$ – ее координаты.

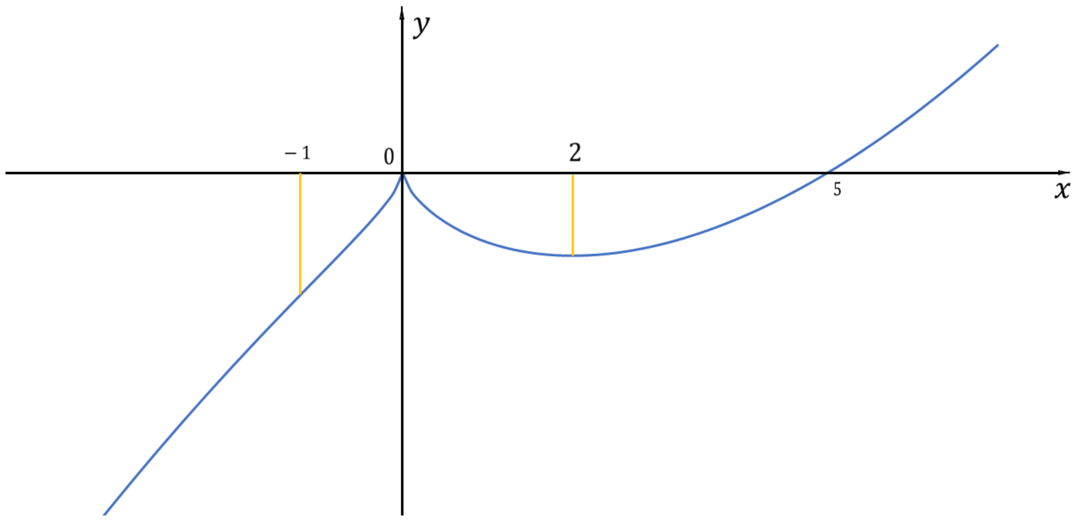
5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$$k_{+} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-5)\sqrt[3]{x^2}}{x} = +\infty$$

$$k_{-} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-5)\sqrt[3]{x^2}}{x} = +\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот у графика этой функции нет.

6) Заметим, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$ $\Rightarrow$ тангенс угла наклона касательной при $x \to \pm\infty$ стремится к $+\infty$ $\Rightarrow$ угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $x \to \pm\infty$.



$$\boldsymbol{y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}}$$

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локального максимума и минимума, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным. Обратите внимание на то, что в точке, в которой значение функции существует, а производная не существует, график функции «царапается», если же в точке существует и значение производной, то график в этой точке «гладкий».

Пример 10. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, с полным исследованием.

Будем считать, что числа a и b положительны.

Заметим, что множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, не может быть задано графиком какой-то одной функции $y=f(x)$.

1) Заметим, что $\frac{x^2}{a^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}\leq 1 \Leftrightarrow -b\leq y\leq b$. Аналогично, $\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Rightarrow b=1-\frac{x^2}{a^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}\leq 1 \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$. Таким образом, точки кривой будут находиться только внутри прямоугольника $-a\leq x\leq a$, $-b\leq y\leq b$. Кроме того, уравнение является четным по обеим переменным, следовательно, кривая симметрична относительно обеих координатных осей. Ограничимся использованием симметрии кривой относительно оси Ox: построим график кривой в верхней полуплоскости (при $y\geq 0$) и сделаем симметрию относительно оси Ox.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. $x=0 \Rightarrow 1-\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow y=\pm b$. Аналогично, $y=0 \Rightarrow 1-\frac{x^2}{a^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm a$. Таким образом, в верхней полуплоскости (включая ось Ox) лежат следующие точки пересечения кривой с координатными осями: $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$.

3) Вертикальных асимптот нет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Заметим, что в верхней полуплоскости уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ неявно задает функцию $y=y(x)$. В этом случае в верхней полуплоскости функцию можно задать и в явном виде: $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Но нам будет интереснее считать, что функция задана неявно, и найти производную неявно заданной функции. Для этого продифференцируем по переменной x уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получим

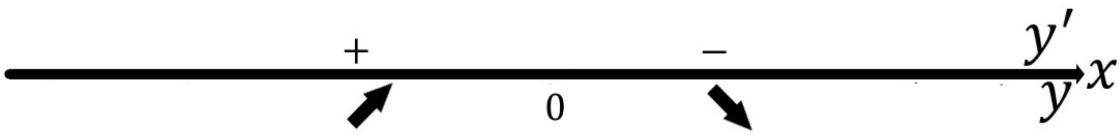
$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'_x}{b^2}=0 \Leftrightarrow b^2x+a^2yy'_x=0.$$

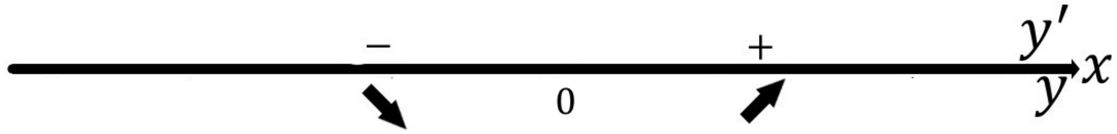
Следовательно, при $y \neq 0$ получим, что $y'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$, и поэтому $y'_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y \neq 0$. Но при $x = 0$ в верхней полуплоскости $y = b$. Заметим, кроме того, что $y'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} < 0$ при $x > 0$ и $y > 0$ (то есть в первом квадранте функция $y = y(x)$ убывает) и $y'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} > 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ (то есть во втором квадранте функция $y = y(x)$ возрастает). Поэтому точка $(0; b)$ является точкой локального максимума.

Рассмотрим поведение y'_x в окрестностях точек $(a; 0)$ и $(-a; 0)$.

$$\lim_{x \to -a} y'(x) = \lim_{x \to -a, y \to 0} \left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left[\frac{-a}{0_+} \right] = +\infty$$

Это означает, что тангенс угла наклона касательной стремится к $+\infty$ при $x \to -a$ $\Rightarrow$ угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ касательная в точке $(-a; 0)$ является вертикальной прямой $x = -a$. Аналогично, касательная к кривой в точке $(a; 0)$ является вертикальной прямой $x = a$.





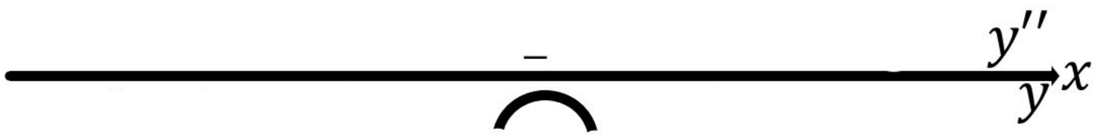
Б) Найдем вторую производную функции $y = y(x)$. Снова будем считать, что функция задана неявно.

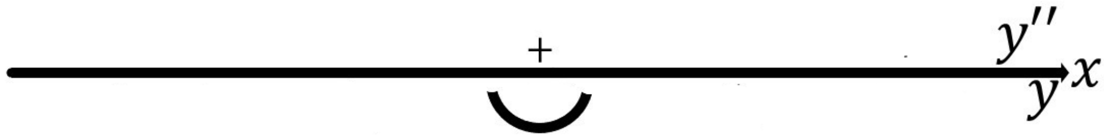
$$y'' = (y'_x)'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x y'_x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x \cdot \left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \frac{x}{y}}{y^2} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 y^3} < 0$$

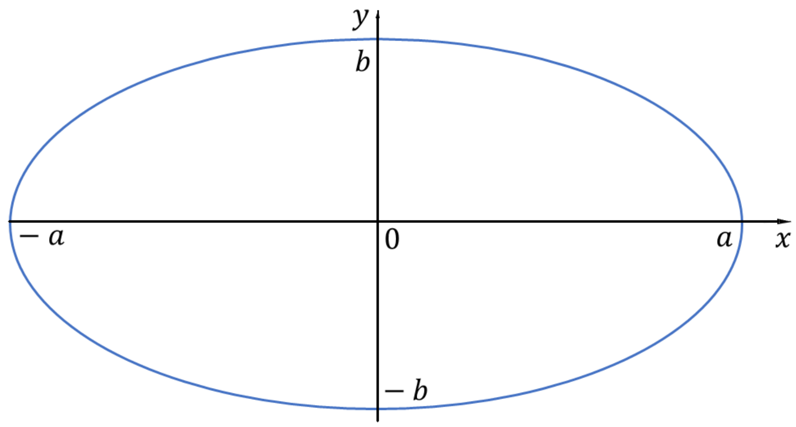
при всех $y > 0$ (то есть в верхней полуплоскости). Поэтому $y = y(x)$ выпукла вверх в 1-м и 2-м квадрантах.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точка локального максимума. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным и получаем часть графика уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в верхней полуплоскости.





Делаем симметрию относительно оси Ox и получаем все множество точек, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Пример 11. Построить график функции $y=x^x$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y=x^x$ множество всех $x>0$.

2) Точек пересечения графика с координатными осями не будет, так как $x>0$ (область определения функции) и $y=x^x>0$ (область значений показательной функции). В частности, мы получили, что график функции $y=x^x$ будет целиком находиться в 1-м квадранте.

3) Так как функция не определена при $x=0$, то найдем предел $\lim\limits_{x\to0+0}y(x)=\lim\limits_{x\to0+0}x^x=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to0+0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

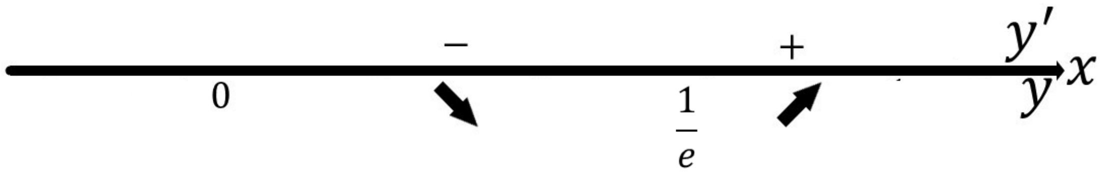
Здесь мы воспользовались правилом Лопиталя – Бернулли при вычислении предела $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0+0}x=0$. Отметим «дыркой» точку с координатами $(0;1)$, так как точки графика функции $y=x^x$ здесь не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную. Воспользуемся правилом вычисления «логарифмической» производной.

$y=x^x\Longrightarrow\ln y=\ln x^x\Longrightarrow\ln y=x\ln x\Longrightarrow\frac{1}{y}\cdot y'_x=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\Longrightarrow$
$y'_x=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

Итак, $y'_x = x^x(\ln x + 1)$. Поэтому, $y'_x = 0 \Leftrightarrow x^x(\ln x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Проанализировав $y'(x)$, получим «картинку»



Из «картинки» получаем, что при $x = e^{-1}$ функция имеет локальный минимум, причем, $x_{min} = x = e^{-1} \Rightarrow y_{min} = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}}$, то есть $\left(e^{-1}, e^{-e^{-1}}\right)$ – координаты точки локального минимума функции $y = x^x$.

В такой ситуации бывает полезно посчитать

$$\lim_{x\to 0_+} y'_x = \lim_{x\to 0_+} x^x(\ln x + 1) = [1\cdot(-\infty)] = -\infty$$

Это означает, что при $x \to 0_+$ тангенс угла наклона касательной стремится к $-\infty$, следовательно, угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$.

Б) Найдем вторую производную функции.

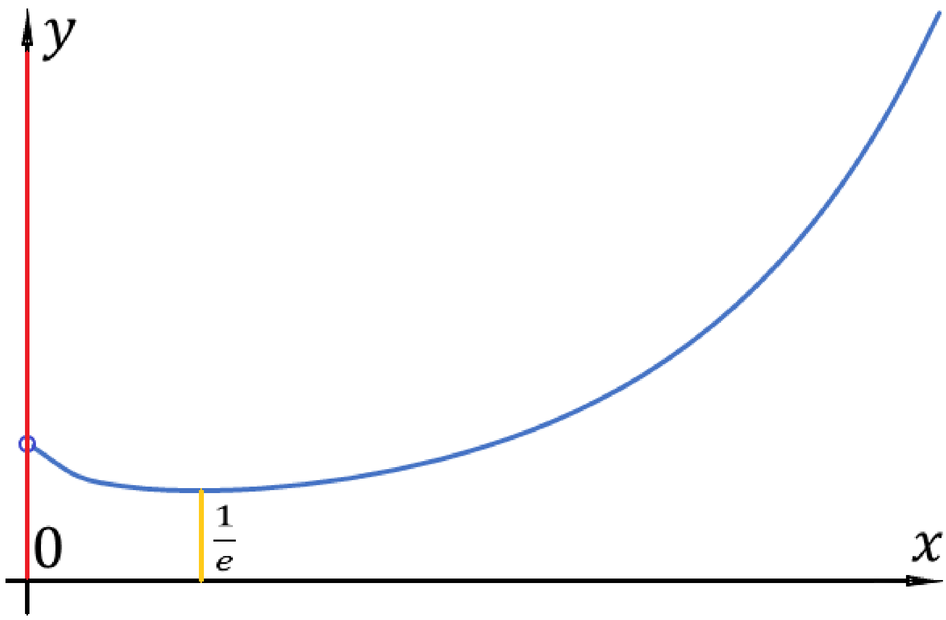
$y'' = (y'_x)'_x = (x^x)'(\ln x + 1) + x^x(\ln x + 1)' =$

$= x^x(\ln x + 1)(\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x\left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0\ \forall x \in (0; +\infty).$

Следовательно, функция $y = x^x$ выпукла вниз на всей области определения.

5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{x-1} = +\infty.$



$\boldsymbol{y = x^x}$

Следовательно, наклонных асимптот у графика функции нет.

Итак, в системе координат уже проставлена точка локального минимума. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным

В заключение рассмотрим пример построения графика функции, заданной параметрически.

Пример 12. Построить график функции $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}} \\ \boldsymbol{y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}} \end{cases}$ **с полным исследованием.**

Сначала построим с полным исследованием график каждой функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Рассмотрим функцию $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$.

Нарисуем систему координат Otx с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$ множество всех $t \neq 1$. Рациональная функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями. Заметим, что $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Следовательно, $(0; 0)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

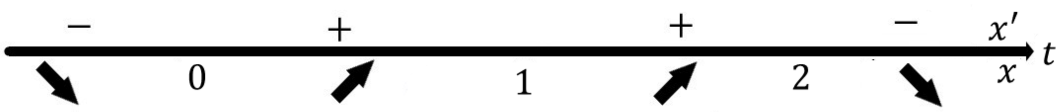
3) Так как функция не определена при $t = 1$, то найдем пределы $\lim\limits_{t\to 1_+} \frac{t^2}{4(1-t)} = -\infty$ и $\lim\limits_{t\to 1_-} \frac{t^2}{4(1-t)} = +\infty$.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$x'_t = \frac{2t\cdot 4(1-t) - t^2\cdot(-4)}{16(1-t)^2} = \frac{8t - 8t^2 + 4t^2}{16(1-t)^2} = \frac{2t - t^2}{4(1-t)^2} = \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2}$.

Проанализировав $x'(t)$, получим «картинку»

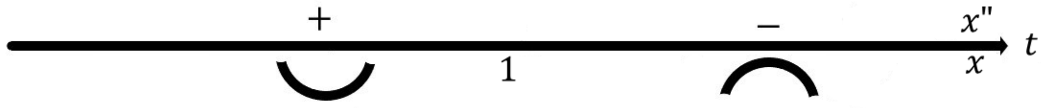


Из «картинки» видно, что $(2; -1)$ – точка локального максимума, а $(0; 0)$ – точка локального минимума.

Б) Найдем вторую производную функции.

$x''_{tt} = (x'_t)'_t = \frac{(2-2t)\cdot(1-t)^2 + (2t - t^2)\cdot 8(1-t)}{16(1-t)^4} = \frac{(1-t)^2 + 2t - t^2}{2(1-t)^3} = \frac{1}{2(1-t)^3}$.

Анализируем знак y'' и получаем «картинку».

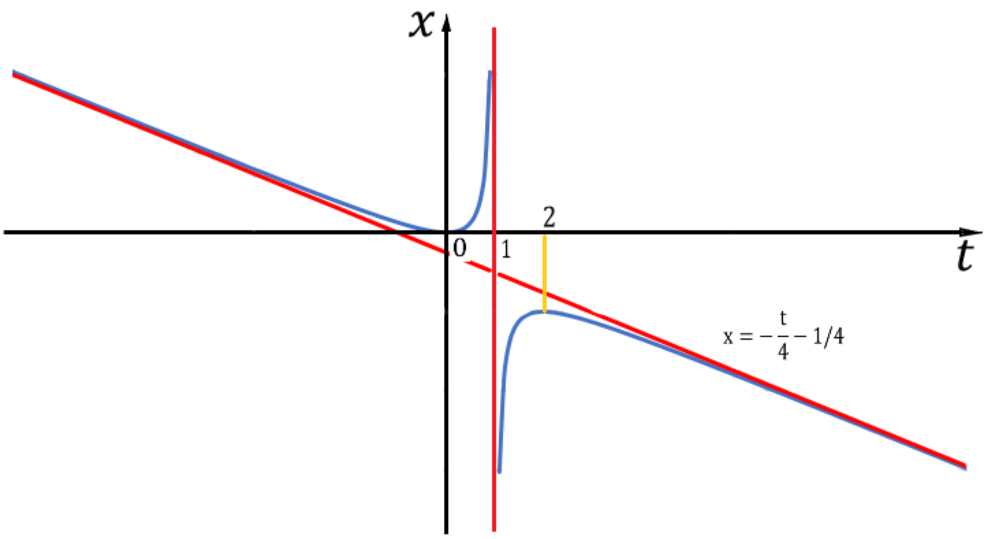


5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$k_{\pm} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{t^2}{4t(1-t)} = -\frac{1}{4}$

$b_{\pm} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} (x(t) - k_{\pm}t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \left(\frac{t^2}{4(1-t)} + \frac{t}{4}\right) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{t}{4(1-t)} = -\frac{1}{4}.$

Итак, прямая $x = -\frac{t}{4} - \frac{1}{4}$ является асимптотой для функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$ при $t \to \pm\infty$.



$$\boldsymbol{x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}}$$

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локального минимума и локального максимума, не забываем о вертикальной асимптоте $x = 1$, поведении функции в проколотой окрестности точки $x = 1$. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным, не забывая нарисовать пунктиром наклонную асимптоту.

Рассмотрим функцию $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$.

Нарисуем систему координат Oty с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ множество всех $t \neq 1$. Рациональная функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями. Заметим, что $y = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Следовательно, $(0;0)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

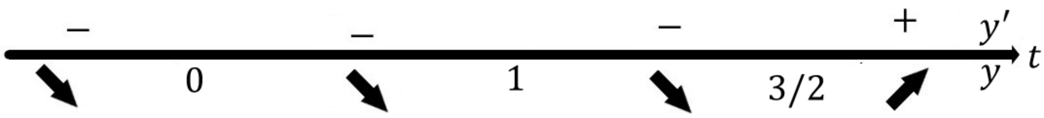
3) Так как функция не определена при $t = 1$, то найдем пределы $\lim\limits_{t\to 1_+} \frac{t^3}{8(t-1)} = +\infty$ и $\lim\limits_{t\to 1_-} \frac{t^3}{8(t-1)} = -\infty$.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$y'_t = \frac{3t^2\cdot 8(t-1)-t^3\cdot 8}{64(t-1)^2} = \frac{2t^3-3t^2}{8(t-1)^2} = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}$.

Проанализировав $y'(t)$, получим «картинку»



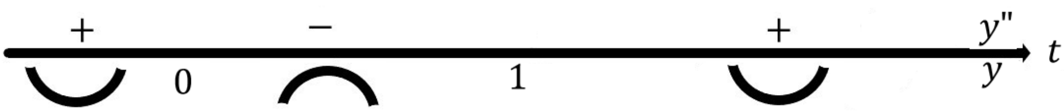
Из «картинки» видно, что у функции $y(t)$ есть точка локального минимума, которая имеет координаты $(t_{min}; y_{min}) = \left(\frac{3}{2}; \frac{27}{32}\right)$.

Б) Найдем вторую производную функции.

$y''_{tt} = (y'_t)'_t = \frac{(6t^2-6t)\cdot 8(t-1)^2-16(t-1)(2t^3-3t^2)}{64(t-1)^4} =$

$= \frac{(3t^2-3t)(t-1)-(2t^3-3t^2)}{4(t-1)^3} = \frac{3t^3-3t^2-3t^2+3t-2t^3+3t^2}{4(t-1)^3} = \frac{t^3-3t^2+3t}{4(t-1)^3} = \frac{t(t^2-3t+3)}{4(t-1)^3}$.

Анализируем знак y''_{tt} и получаем «картинку».



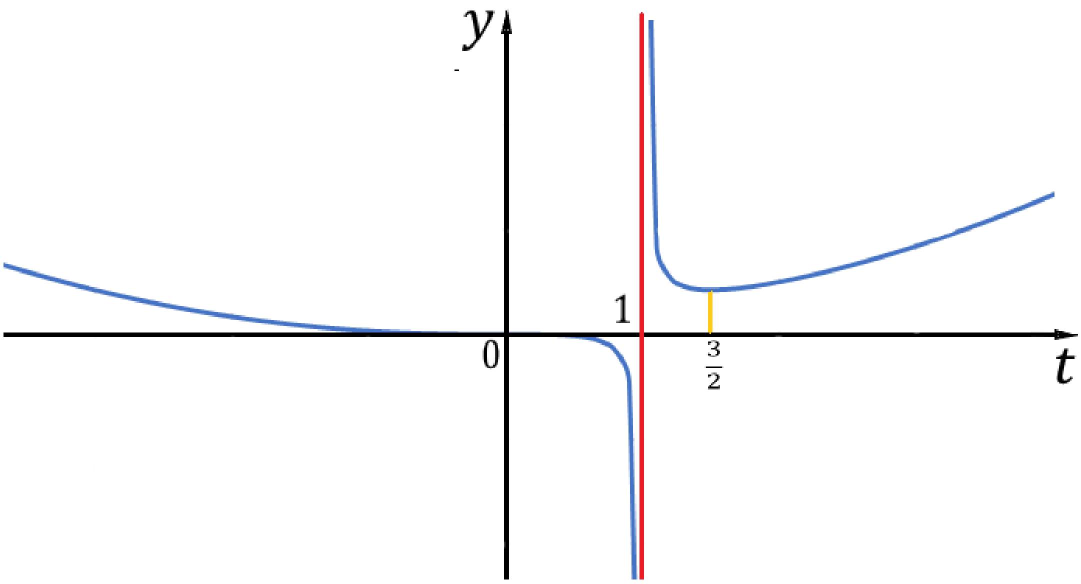
Из «картинки» видно, что график функции $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ имеет точку перегиба, координаты которой $(0;0)$.

5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$k_\pm = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{t^3}{8t(t-1)} = \pm\infty$.

Следовательно, у графика функции наклонных асимптот нет.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального минимума, не забываем о вертикальной асимптоте $x = 1$, поведении функции в проколотой окрестности точки $x = 1$. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным.



$$\boldsymbol{y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}}$$

Для построения графика функции, заданной параметрически, нам потребуется найти $y_x'(t)$ и $y_{xx}''(t)$.

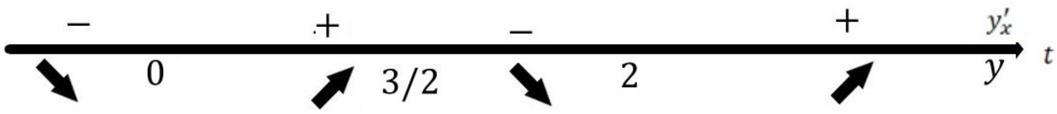
$$y_x'(t) = \frac{y_x'(t)}{x_t'} = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2} \cdot \frac{4(t-1)^2}{t(2-t)} = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}$$

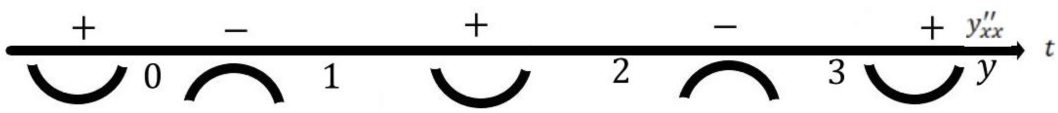
$$y_{xx}''(t) = \frac{y_{tt}''x_t' - x_{tt}''y_t'}{(x_t')^3} = \frac{\frac{t(t^2-3t+3)}{4(t-1)^3} \cdot \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2} - \frac{1}{2(1-t)^3} \cdot \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}}{\frac{t^3(2-t)^3}{64(1-t)^6}} =$$

$$= 4(t-1) \cdot \frac{t^2(t^2-3t+3)(2-t)+t^2(2t-3)}{t^3(2-t)^3} = \frac{4(t-1)(-t^3+3t^2-3t+2t^2-6t+6+2t-3)}{t(2-t)^3} =$$

$$= \frac{4(t-1)(t^3-5t^2+7t-3)}{t(t-2)^3} = \frac{4(t-1)(t-1)^2(t-3)}{t(t-2)^3} = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}.$$

Итак, $y_x'(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}$ и $y_{xx}''(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$. Проанализируем поведение $y_x'(t)$ и $y_{xx}''(t)$ и получим «картинки»





Заметим, что на каждой «картинке» возникли «характерные» значения аргумента t, в которых как-то меняется поведение $y_x'(t)$ и $y_{xx}''(t)$.

Рассмотрим t на каждом полученном промежутке отдельно. Нарисуем систему координат Oxy, в которую будем заносить получаемую информацию по построению графика функции $y = y(x)$.

При $t \in (-\infty; 0]$ получим, что $t\colon -\infty \nearrow 0$, $x\colon +\infty \searrow 0$, $y\colon +\infty \searrow 0$. Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} > 0$ при $t \in (-\infty; 0)$, то при $t \in (-\infty; 0]$ (в это время $x \in [0; +\infty)$) функция $y = y(x)$ возрастает. Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in (-\infty; 0)$, то функция $y = y(x)$ выпукла вниз.

Заметим, что у этой части графика функции $y = y(x)$ нет наклонной асимптоты. Действительно (учитываем, что $x \to +\infty$, когда $t \to -\infty$),

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = +\infty.$$

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой 1).

При $t \in (0; 1)$ получим, что $t\colon 0 \nearrow 1$, $x\colon 0 \nearrow +\infty$, $y\colon 0 \searrow -\infty$. Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in (0; 1)$, то при $t \in (0; 1)$ (в это время $x \in (0; +\infty)$) функция $y = y(x)$ убывает. Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} < 0$ при $t \in (0; 1)$ ($x \in (0; +\infty)$), то функция $y = y(x)$ выпукла вверх.

У этой части графика функции $y = y(x)$ есть наклонная асимптота. Действительно,

$$k = \lim_{t\to1_-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1_-} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{t\to1_-} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t\to1_-} \left(\frac{t^3}{8(t-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{4(1-t)}\right) = \frac{1}{8} \cdot \lim_{t\to1_-} \frac{t^2(t-1)}{t-1} = \frac{1}{8}.$$

Итак, получаем, что прямая $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ является наклонной асимптотой для графика функции $y = y(x)$ при $x \to +\infty$ ($t \to 1_-$).

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой 2).

При $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ получим, что $t\colon 1 \nearrow \frac{3}{2}$, $x\colon -\infty \nearrow -\frac{9}{8}$, $y\colon +\infty \searrow \frac{27}{32}$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, то при $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ $\left(\text{в это время } x \in \left(-\infty; -\frac{9}{8}\right)\right)$ функция $y = y(x)$ убывает.

Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, то функция $y = y(x)$ выпукла вниз.

У этой части графика функции $y = y(x)$ есть наклонная асимптота. Действительно,

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1_+} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t\to1_+} \left(\frac{t^3}{8(t-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{4(1-t)}\right) = \frac{1}{8} \cdot \lim_{t\to1_+} \frac{t^2(t-1)}{t-1} = \frac{1}{8}.$$

Итак, получаем, что прямая $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ является наклонной асимптотой для графика функции $y = y(x)$ при $x \to -\infty$ $(t \to 1_+)$.

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой 3).

При $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ получим, что t: $\frac{3}{2} \nearrow 2$, x: $-\frac{9}{8} \nearrow -1$, y: $\frac{27}{32} \nearrow 1$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} > 0$ при $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$, то при $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ $\Big($в это время $x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\Big)$ функция $y = y(x)$ возрастает.

Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ $\left(x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\right)$, то функция $y = y(x)$ на этом участке выпукла вниз.

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой 4).

Заметим, что при $t = \frac{3}{2}$ $\left(x = -\frac{9}{8}\right)$ функция $y'_x(t)$ «меняет знак» с «$-$» на «$+$». Поэтому при $x = -\frac{9}{8}$ наша функция $y = y(x)$ имеет локальный минимум.

При $t \in [2; 3)$ получим, что t: $2 \nearrow 3$, x: $-1 \searrow -\frac{9}{8}$, y: $1 \nearrow \frac{27}{16}$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in (2; 3)$, то при $t \in (2; 3)$ $\Big($в это время $x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\Big)$ функция $y = y(x)$ убывает.

Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} < 0$ при $t \in (2; 3)$ $\left(x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\right)$, то функция $y = y(x)$ на этом участке выпукла вверх.

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой 5).

Заметим, что при $t = 2$ $(x = -1)$ функция $y = y(x)$ определена, но производная $y'_x(t)$ не определена. Поэтому рассмотрим

$$\lim_{x \to -1_-} y'_x(t) = \lim_{t \to 2_-} \left(-\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}\right) = \left[-\frac{2}{0_-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1_-} y'_x(t) = \lim_{t \to 2_+} \left(-\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}\right) = \left[-\frac{2}{0_+}\right] = -\infty.$$

Это означает, что при $x \to -1$ $(t \to 2)$ тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = y(x)$ стремится к ∞, то есть угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$, то есть прямая $x = -1$ является вертикальной касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $(-1; 1)$.

При $t \in [3; +\infty)$ получим, что t: $3 \nearrow +\infty$, x: $-\frac{9}{8} \searrow -\infty$, y: $\frac{27}{16} \nearrow +\infty$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in [3; +\infty)$, то при $t \in (3; +\infty)$ $\Big($в это время $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{8}\right)\Big)$ функция $y = y(x)$ убывает.

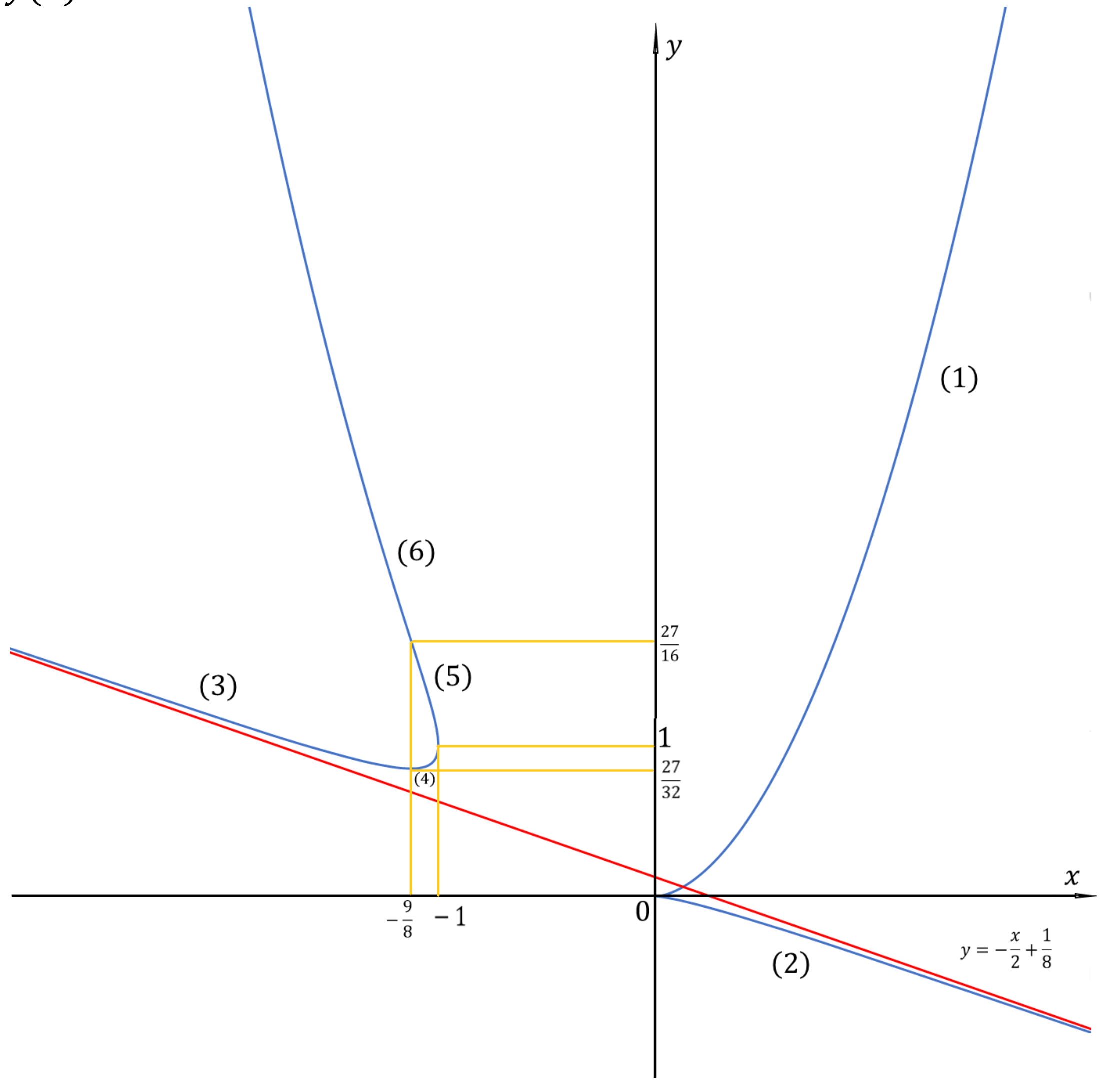
Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in [3; +\infty)$, то функция $y = y(x)$ выпукла вниз.

Заметим, что у этой части графика функции $y = y(x)$ нет наклонной асимптоты. Действительно (учитываем, что $x \to -\infty$, когда $t \to +\infty$),

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = -\infty.$$

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой 6).

Кроме того, при $t = 3$ $\left(\text{в это время } x = -\frac{9}{8}\right)$ вторая производная $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$ «меняет знак» с «$-$» на «$+$». Это означает, что точка с координатами $\left(-\frac{9}{8}; \frac{27}{16}\right)$ является точкой перегиба для графика функции $y = y(x)$.



$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}} \\ \boldsymbol{y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}} \end{cases}$$

Все эти шесть кривых дают полный график параметрически заданной функции $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)} \\ y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)} \end{cases}$ в системе координат Oxy.

Замечание. Примеры 10 и 12 показывают, что существует много кривых, которые не является графиками функций $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Такие кривые задаются уравнениями $\varphi(x; y) = 0$, параметрически, в полярных координатах и т.д. И, конечно, должны быть построены методы их исследования.

График изотермы газа Ван-дер-Ваальса

Построим график изотермы газа Ван-дер-Ваальса, соответствующей критической температуре. Уравнение имеет вид:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \qquad (1)$$

где p – давление, T – температура, V – объем; R – универсальная газовая постоянная; $a, b > 0$ индивидуальные параметры.

Считаем температуру постоянной, имеющей критическое значение, которое будет указано ниже. Тогда уравнение задает p как функцию от одной переменной $V, V > b$. Критическая точка газа определяется уравнениями

$$p' = 0, p'' = 0, \qquad (2)$$

где производные взяты по переменной V.

Дифференцируем равенство (1):

$$p'' = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}.$$

Система (2) принимает вид:

$$\frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2}, \frac{6a}{V^4} = \frac{2RT}{(V-b)^3}, \qquad (3)$$

откуда находим:

$$2 = \frac{3(V-b)}{V}, \quad 2V = 3V - 3b, \quad V = 3b. \qquad (4)$$

Это – величина критического объема.

Критическую температуру находим из равенства $p = 0$, то есть:

$$27b^3RT = 2a \cdot 4b^2, T = \frac{8a}{27bR}. \qquad (5)$$

Итак, построим график изотермы для T, принимающей критическое значение (5). Функция p непрерывна при $V > b$. При стремлении $V \to b + 0$ имеем: $p \to +\infty$, что означает, что у графика есть вертикальная асимптота. Производная p' найдена выше, она равна 0, если выполнено первое из уравнений (8.3),

$$\frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2}, \text{ откуда } \frac{2a}{V^3} = \frac{R \cdot ba}{27b \cdot R \cdot (V-b)^2},$$

что после преобразования дает:

$$4V^3 - 27bV^2 + 54b^2V - 27b^3 = 0. \qquad (6)$$

Один корень производной, $V = 3b$, уже найден в (4), поэтому уравнение (6) легко преобразовать к виду:

$$(V - 3b)^2 \cdot (4V - 3b) = 0.$$

В области $V > b$ лежит только точка $V = 3b$, в которой производная знака не меняет, в ней нет экстремума.

Нули второй производной ищем из второго уравнения (3),

$$\frac{6a}{V^4} = \frac{2RT}{(V-b)^3},$$

или, учитывая (5),

$$8V^4 = 81b(V - b)^3.$$

Делим обе части этого уравнения на b^4 и обозначаем $z = \frac{V}{b}$.

Тогда

$$8z^4 = 81(z - 1)^3.$$

Здесь также очевиден корень $z = 3$ (соответствующий точке $V = 3b$).

Для того, чтобы выяснить вид графика вблизи критической точки, вычислим третью производную p''',

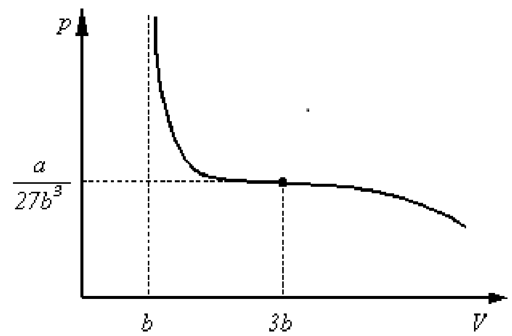
$$p''' = -\frac{6RT}{(V-b)^4} + \frac{24a}{V^5},$$

и подставим в неё найденные значения V и T из равенств (4) и (5):

$$p''' = -\frac{6R \cdot 8a}{27bR \cdot (2b)^4} + \frac{24a}{(3b)^5} = \frac{a}{b^5}\left(-\frac{6 \cdot 8}{27 \cdot 2^4} + \frac{24}{3^5}\right) = \frac{a}{b^5}\left(-\frac{1}{9} + \frac{8}{81}\right) < 0. \qquad (7)$$

Неравенство (7) означает, что в точке $V = 3b$, отвечающей температуре (5), график функции (1) имеет перегиб.

Таким образом, получаем, что график имеет вид



Примечание: более подробно с этой задачей и, главное, с основными понятиями физической химии, связанными с ней, можно ознакомиться по книге:

Основы физической химии. Теория и задачи: Учеб. пособие для вузов / В.В.Ерёмин, С.И. Каргов, И.А. Успенская, Н.Е. Кузьменко, В.В. Лунин. - М.: Изд-во «Экзамен», 2005, (Серия «Классический университетский учебник»).

График межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса

Построим график межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса, задаваемого формулой

$$U(r) = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right), \quad r > 0.$$

Это – непрерывная в области определения функция. При $r \to +0$ имеем: $U(r) \to +\infty$, поэтому прямая $r = 0$ является вертикальной асимптотой графика. Если $r \to +\infty$, то $U(r) \to 0$ снизу, прямая $U = 0$ – горизонтальная асимптота. Величина $U(r)$ обращается в нуль при $\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 = 2$, т.е. при $r = \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$, и для $r > \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ выполняется неравенство $U(r) < 0$, а для $0 < r < \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ — неравенство $U(r) > 0$.

Производная функции $U(r)$ равна

$$U'(r) = U_0\left(-\frac{12}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13} + \frac{12}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right) = \frac{12U_0}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\cdot\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right),$$

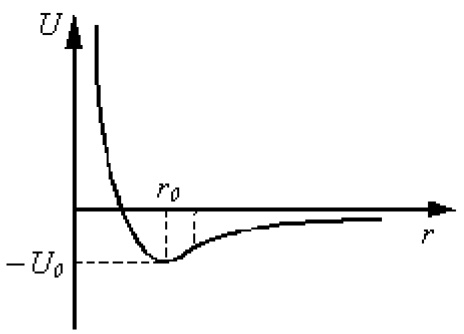
откуда следует, что при $r < r_0$ выполняется $U'(r) < 0$, при $r = r_0$ имеем $U'(r_0) = 0$ и $U'(r) > 0$ при $r > r_0$, так что в точке $r = r_0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного $-U_0$.

Вторая производная $U''(r)$ равна

$$U''(r) = U_0\left(\frac{12\cdot 13}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{14} - \frac{12\cdot 7}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\right) = \frac{12\cdot U_0}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\cdot\left(13\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} - 7\right),$$

откуда $U''(r) < 0$ при $r > r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$, $U''(r) = 0$ при $r = r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$ и $U''(r) > 0$ при $0 < r < r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$. Следовательно, выпуклость графика вниз на интервале $\left(r_0, r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}\right)$ меняется на выпуклость вверх на $\left(r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}},\ +\infty\right)$, точка $r = r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$ — точка перегиба.

График $U(r)$ имеет вид:



Примечание: более подробно с этой задачей и, главное, с основными понятиями физической химии, связанными с ней, можно ознакомиться по книге:

Основы физической химии. Теория и задачи: Учеб. пособие для вузов / В.В.Ерёмин, С.И. Каргов, И.А. Успенская, Н.Е. Кузьменко, В.В. Лунин. - М.: Изд-во «Экзамен», 2005, (Серия «Классический университетский учебник»).