

Билет 5. Предел последовательности. Предел функции.

Определение 5.1. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено число $a_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана *последовательность* $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$

Некоторые последовательности обладают очень важным свойством – они имеют предел.

Определение 5.2. Последовательность $\{a_n\}$ *имеет предел, равный числу A* тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Удобно записывать это определение с помощью логических символов:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 \forall n > N(\varepsilon) |a_n - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела последовательности используется символ:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$.

Пример 1. Если $a_n = A$ для всех n , то $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = A$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N(\varepsilon)$, и любого n
 $|a_n - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon$.

Пример 2. Если $a_n = \frac{1}{n}$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда если $n > N(\varepsilon)$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$, поэтому $|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{W}(a)$ точки a .

Определение 5.3. Функция $f(x)$ имеет *при $x \rightarrow a$ предел, равный числу A* тогда и только тогда, когда для любой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a ($(a) \subset \dot{W}(a)$) такая, что $f(\dot{U}(a)) \subset V(A)$, или, равносильно, такая, что для любого $x \in \dot{U}(a)$ $f(x) \in V(A)$. С помощью логических символов это определение записывается так:
 $\forall V(A) \exists \dot{U}(a) \forall x \in \dot{U}(a) f(x) \in V(A)$

Данное определение называется определением предела по Коши.

В этом определении можно вместо произвольной $V(A)$ рассматривать $V_\varepsilon(A)$ при произвольном $\varepsilon > 0$ и, соответственно, вместо $\dot{U}(a)$ - проколотую окрестность $\dot{U}_\delta(a)$. Тогда оно примет вид: $\forall V_\varepsilon(A) \exists \dot{U}_\delta(a) \forall x \in \dot{U}_\delta(a) f(x) \in V_\varepsilon(A)$.

Вспоминая, что условие $x \in \dot{U}_\delta(a)$ равносильно неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, а условие $f(x) \in V_\varepsilon(A)$ равносильно условию $|f(x) - A| < \varepsilon$, получаем равносильную определению 5.3 запись определения предела на "языке $\varepsilon - \delta$ ":

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Теорема 5.1. *Если предел последовательности $\{a_n\}$ существует, то он единствен, т.е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A_1$ и если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A_2$, то $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Предположим, что последовательность имеет пределом число A_1 , а также имеет пределом число A_2 , $A_1 \neq A_2$. Тогда: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) > 0 \forall n > N_1(\varepsilon) \ |a_n - A_1| < \varepsilon$.

Полагая в этом условии $\varepsilon = \frac{|A_2 - A_1|}{2}$, получаем, что при $n > N_1$ $|a_n - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$. Аналогично, поскольку A_2 - тоже предел, получаем, что при $n > N_2$ $|a_n - A_2| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда при $n > N$ выполняются условия $n > N_1$ и $n > N_2$, поэтому

$$\begin{aligned} |A_2 - A_1| &= |A_2 - a_n + a_n - A_1| \leq |A_2 - a_n| + |a_n - A_1| \\ &= |a_n - A_2| + |a_n - A_1| < \\ &< \frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2} = |A_2 - A_1| \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 5.2. *Если предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует, то он единствен, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_2$, то $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Утверждение этой теоремы доказывается вполне аналогично, но оно будет приведено ниже для полноты изложения. Пусть снова функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow a$ два предела, A_1 и A_2 . Тогда, применяя определения предела при $x \rightarrow a$ получаем, что для $\varepsilon = \frac{|A_2 - A_1|}{2}$ существуют числа δ_1 и δ_2 такие, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$, а при $0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$. Тогда положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и потребуем, чтобы $0 < |x - a| < \delta$. При этом $|A_2 - A_1| = |A_2 - f(x) + f(x) - A_1| \leq |A_2 - f(x)| + |f(x) - A_1| = |f(x) - A_2| + |f(x) - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2} = |A_2 - A_1|$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 5.4. Последовательность $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Аналогично, функция $\alpha(x)$ - *бесконечно малая при $x \rightarrow a$* , если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Теорема 5.3. Предел последовательности $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ существует и равен A тогда и только тогда, когда α_n можно представить в виде $\alpha_n = A + \alpha_n$, где α_n - бесконечно малая последовательность.

Аналогично, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

Доказательство. Доказательство проведем для случая функций. Для последовательностей оно вполне аналогично. Итак, обозначим $\alpha(x) = f(x) - A$. Условие $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ равносильно тому, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$ $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$, что равносильно условию $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$ $0 < |x - a| < \delta \implies |\alpha(x)| < \varepsilon$, что, в свою очередь, означает, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.