

Билет 1. Множества и операции над ними

1.1. Понятие множества

Понятия множества и его элемента относятся к числу первичных, неопределяемых понятий математики. К таким же понятиям относятся точка, прямая линия и др. Вместо определения такого понятия приходится обходиться его описанием. Создатель теории множеств Георг Кантор в 1872 году описал понятие множества, как «объединения в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Мы будем говорить, что определено некоторое множество M объектов, если указан признак, который позволяет относительно каждого предмета x сказать, принадлежит ли этот предмет множеству M , или нет.

Элементы множеств в дальнейшем будем записывать строчными латинскими буквами, сами множества – прописными. Обозначение $a \in A$ используется, как краткая запись утверждения: a есть элемент множества A , или: a принадлежит A . Аналогично, обозначение $a \notin A$ используется, как краткая запись утверждения: a не является элементом множества A или a не принадлежит A . Множество, не имеющее элементов, называется пустым и обозначается \emptyset .

Укажем ряд способов задания множеств. Во-первых, можно просто перечислить все элементы множества, если этих элементов – конечное число, т.е. если множество конечное. Например, множество, состоящее из двух чисел, 0 и 1. В этом случае используется обозначение $\{0,1\}$. Для произвольного конечного множества, например, состоящего из различных элементов a_1, \dots, a_m , используется обозначение $\{a_1, \dots, a_m\}$. Подчеркнём, что в этом обозначении множества элементы a_1, \dots, a_m должны быть различными, однако они могут быть перечислены в произвольном порядке, например, $\{1,2,3,4\}$ и $\{2,1,4,3\}$ - различные обозначения одного и того же множества.

Можно также указать свойство, которому удовлетворяют элементы рассматриваемого множества. Например, множество действительных чисел, больших 5. Обозначим его $\{x|x > 5\}$.

Некоторые множества определяются с помощью указания способа последовательного построения его элементов. Например, $x_1 = 1$, $x_n = nx_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$

Новые множества можно получать и в результате операций над заданными множествами.

Наиболее часто у нас будут рассматриваться множество \mathbb{R} действительных чисел, множество \mathbb{N} натуральных чисел, множество \mathbb{Z} целых чисел, множество \mathbb{Q} рациональных чисел.

1.2. Подмножества

Важный способ задания множества – выделение его как части некоторого *основного* множества. Основное множество образуется всеми элементами какого-нибудь определённого типа. Например, множество целых чисел, множество простых чисел и т.п.

В качестве примера рассмотрим основное множество целых чисел и выберем в нём те числа, которые делятся на 2, т.е. чётные числа. Мы получили множество чётных чисел, которое является подмножеством основного множества целых чисел.

В общем случае, если все элементы множества A являются также элементами множества B , то мы говорим, что A есть *подмножество* B , или A включено в B , и обозначаем это так: $A \subset B$.

Если оказалось, что одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то эти множества называются *равными*, что обозначается $A = B$. Проще говоря, равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Из того, что $A \subset B$ и $B \subset C$ следует, что $A \subset C$ (т.е. отношение включения множеств является *транзитивным*. Понятие отношения и его свойства будут подробнее описаны в билете 2).

1.3. Операции над множествами

Пусть задано некоторое основное множество M и его подмножества A и B .

Определение 1.1. *Объединение* $A \cup B$ этих множеств определяется, как подмножество множества M , состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A и B .

Определение 1.2. *Пересечение* $A \cap B$ этих множеств определяется, как подмножество множества M , состоящее из элементов, одновременно входящих как в множество A , так и в множество B .

Определение 1.3. *Дополнение* ${}^c A$ множества A определяется, как подмножество множества M , не содержащее элементов множества A .

Часто дополнение множества обозначают \bar{A} .

Перечислим некоторые свойства операций над множествами.

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$${}^c(A \cup B) = {}^c A \cap {}^c B, {}^c(A \cap B) = {}^c A \cup {}^c B,$$

$$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup M = M, A \cap M = A$$

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, {}^c \emptyset = M, {}^c M = \emptyset, {}^c({}^c A) = A,$$

$$A \cup {}^c A = M, A \cap {}^c A = \emptyset$$

В качестве примера докажем свойство ${}^c(A \cup B) = {}^c A \cap {}^c B$. Для этого заметим, что условие $x \in {}^c(A \cup B)$ равносильно тому, что $x \notin A \cup B$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $x \notin A$ и $x \notin B$, т.е. $x \in {}^c A \cap {}^c B$. Свойство доказано.

Это утверждение, вместе с утверждением ${}^c(A \cap B) = {}^c A \cup {}^c B$ называют **теоремами де Моргана**. Доказательства остальных свойств ещё проще, и мы их опускаем.