МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(лекции для бакалавров)

Л.М.ЛУЖИНА

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу иностранных студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведен курс лекций для иностранных бакалавров по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений». Приведены примеры решения задач.

Глава 11. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЕ $y' = F(x,y)$. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (БЕЗ ДОК-ВА). УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ.*

Определение 11.1. ***Дифференциальным уравнением,*** называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0,$$

где $F(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})$ – функция, определенная в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{n+2}$, x – независимая переменная, y – функция от x, а функции $y', \ldots y^{(n)}$ – ее производные.

Порядком уравнения называется наивысший из порядков производных y, входящих в уравнение.

Функция $f(x)$ называется ***решением уравнения*** на промежутке (a, b), если для всех x из (a, b), выполняется равенство:
$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) \equiv 0.$

Интегральная кривая – это график решения.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 0$. Его решение: $f(x) \equiv Const$, определено на $(-\infty, +\infty)$. Отметим, что эта постоянная – произвольная, и решение уравнения $y' = 0$ не единственное, у этого уравнения имеется бесконечное множество решений.

Пример 2. Решить уравнение $y' = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, где $\varphi(x)$ – непрерывная на (a, b) функция. Пусть $F(x)$ – первообразная для $\varphi(x)$. Тогда уравнение имеет бесконечное множество решений на (a, b) и все они имеют вид
$y = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная. Есть прямой способ выбрать какое-то одно из этих решений, потребовав, например, чтобы для некоторой точки $x \in (a, b)$ выполнялось условие $y(x_0) = y_0$. Тогда, подставив x_0 в решение, получим условие $y_0 = F(x_0) + C$, определяющее $C = y_0 - F(x_0)$ и, тем самым, единственное решение $y = f(x)$ уравнения $y' = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Рассмотрим значительно более общую ситуацию, чем была в примерах. Пусть исследуемое уравнение имеет вид: $y' = f(x, y)$. Это уравнение первого порядка, разрешенное относительно y'. Термин "разрешенное" означает, что

y' выражается через остальные величины, в отличие от уравнения общего вида $F(x, y, y') = 0$, из которого выразить y', может быть и не удастся. Сформулируем важнейшую теорему.

Теорема 1 (***о существовании и единственности решения задачи Коши***). Пусть $f(t_1, t_2)$ – ***непрерывная функция*** в области $D \in \mathrm{R}^2$, причем $\frac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2)$ – также непрерывна в D. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ ***задача Коши***:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет решение, причем единственное в том смысле, что если есть два ее решения y_1 и y_2, определенные на интервалах (a_1, b_1) и (a_2, b_2), содержащих точку x_0, то они совпадают, на пересечении (a, b) этих интервалов.

Теорему оставим пока без доказательства.

Замечание. Говорят, что решение $y_1(x)$ дифференциального уравнения на интервале (a_1, b_1) есть ***продолжение*** решения $y_2(x)$ на (a_2, b_2), если $(a_2, b_2) \subseteq (a_1, b_1)$, и $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на (a_2, b_2). Также говорят, что решение $y(x)$ – ***максимальное*** или ***непродолжаемое*** относительно D, если $y(x)$ не обладает продолжениями, целиком лежащими в D.

На основании этого замечания можно сказать, что при условиях теоремы существует единственное максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши.

Геометрический смысл сформулированной теоремы состоит в следующем. Левая часть уравнения $y' = f(x, y)$ представляет собой y' – тангенс угла наклона касательной к графику искомой функции в точке (x, y), а правая часть $f(x, y)$ задает его численное значение $f(x, y)$ в этой точке. Поэтому можно считать, что уравнение задает ***поле направлений*** на области D, то есть к каждой точке $(x, y) \in$ B, прикреплен вектор, указывающий направление касательной к искомой интегральной кривой.

Поэтому сформулированная выше теорема означает, что при выполнении ее условий через каждую точку $(x, y) \in$ B проходит единственная непродолжаемая интегральная кривая. Перейдем к простейшим типам дифференциальных уравнений, для которых можно в явном виде получить их решения.

11.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$, где $f(x)$ – непрерывна на некотором (a, b), а $g(y)$ – непрерывна на (c, d), причем $g(y) \neq 0$ на (c, d). Поскольку

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

то проинтегрируем обе части последнего равенства $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Обозначим $G(y)$ любую первообразную для $\frac{1}{g(y)}$, а $F(x)$ – любую первообразную для $f(x)$ и перепишем это уравнение в виде $G(y) = F(x) + C$. Это – искомая интегральная кривая. Рассмотрим некоторые примеры таких уравнений.

Замечание. При интегрировании равенства $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ интегрирование обеих частей идет по переменной x, так как «подробная запись» этого уравнения имеет вид $\frac{dy(x)}{g(y(x))} = f(x)dx$.

Замечание. Если уравнение задано в виде $y' = f(x) \cdot g(y)$, то при переходе к уравнению $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ мы потеряем решения уравнения $y' = f(x) \cdot g(y)$ вида $y_k(x) = C_k$, где C_k – корни уравнения $g(y) = 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение $y' = ay, a \neq 0$. Очевидно, что оно имеет решение $y \equiv 0$. Если же $y \neq 0$ то уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{y} = a.$$

Проинтегрируем это уравнение и получим

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\ln|y| = ax + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$$

пропотенцируем это уравнение, получим

$$e^{\ln|y|} = e^{ax + C_1},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{ax} \cdot C_2,\ C_2 = e^{C_1} > 0$$

$$y = \pm e^{ax} \cdot C_2 = e^{ax}(\pm C_2) = C_3 e^{ax},\ C_3 \neq 0$$

Но так как мы в самом начале получили, что и $y \equiv 0$ является решением этого уравнения (а оно получается при $C_3 = 0$), то общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}.$$

11.2. Однородные уравнения

Под ***однородными*** уравнениями понимаются уравнения вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Для их решения требуется сделать замену $y(x) = u(x) \cdot x$ после чего получится уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $xdy = (x + y)dx$.

Оно имеет решение $x \equiv 0$. Пусть теперь $x \neq 0$. Преобразуем уравнение так: $y' = \frac{x+y}{x}$ (правая часть имеет вид $1 + \frac{y}{x}$ – и это однородное уравнение). Полагаем $y = ux$. Тогда $y' = u' \cdot x + u$ и получаем уравнение

$u'x + u = 1 + u,\ \ u'x = 1,\ \ u' = \frac{1}{x},\ \ u = \ln|x| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Значит, $y = x\ln|x| + Cx,\ \ C \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x \equiv 0,\ \ y = x\ln|x| + Cx,\ \ C \in \mathbb{R}$.

Глава 12. *ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ*

12.1. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение 1. ***Линейным уравнением первого порядка*** называется уравнение вида

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0,$$

где $\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x) \in C(a,b),\ \ (a,b)$ – заданный интервал.

Обычно считают, что $\alpha(x) \neq 0$, и тогда линейное уравнение принимает вид

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x),\ Q(x) \in C(a,b)$.

Если $Q(x) \equiv 0$, то это уравнение является линейным ***однородным*** уравнением, в противном случае оно называется ***неоднородным***.

Решим однородное уравнение

$y' + P(x)y = 0.$

Очевидно, что $y \equiv 0$ – решение уравнения $y' + P(x)y = 0$. Линейное уравнение удовлетворяет на (a, b) всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, поэтому какое-то другое решение этого уравнения, отличное от тождественного нуля, не обращается в 0 ни в одной точке на (a, b).

Итак, считаем, что $y \neq 0$.

$y' + P(x)y = 0 \Leftrightarrow y' = -P(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx$,

откуда, обозначая $\tilde{P}(x)$ любую первообразную для функции $-P(x)$, находим, что

$\ln|y| = \tilde{P}(x) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

пропотенцируем это уравнение, получим

$e^{\ln|y|} = e^{\tilde{P}(x)+C_1},\ C_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = e^{\tilde{P}(x)} \cdot C_2,\ C_2 = e^{C_1} > 0$

$y = \pm e^{\tilde{P}(x)} \cdot C_2 = e^{\tilde{P}(x)}(\pm C_2) = C_3 e^{\tilde{P}(x)},\ C_3 \neq 0.$

Но так как и $y \equiv 0$ является решением этого уравнения (а оно получается при $C_3 = 0$), то общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$y = Ce^{\tilde{P}(x)},\ C \in \mathbb{R}.$

Далее используем ***метод вариации постоянных***: ищем решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{\tilde{P}(x)}$. При этом

$y' = C'(x)e^{\tilde{P}(x)} + C(x)e^{\tilde{P}(x)} \cdot \tilde{P}'(x) = C'(x)e^{\tilde{P}(x)} - C(x)\tilde{P}'(x) \cdot e^{\tilde{P}(x)}.$

Подстановка в уравнение дает

$C'(x)e^{\tilde{P}(x)} - C(x)P(x) \cdot e^{\tilde{P}(x)} + C(x)p(x) \cdot e^{\tilde{P}(x)} = Q(x)$, или

$$C'(x) = Q(x)e^{-\tilde{P}(x)}.$$

Интегрируем и, обозначая $\tilde{Q}(x)$ первообразную для $Q(x)e^{-\tilde{P}(x)}$, получаем $C(x) = \tilde{Q}(x) + C_1$. Тогда $y = (\tilde{Q}(x) + C_1)e^{\tilde{P}(x)}$.

Эту формулу иногда записывают в виде

$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1\right)e^{-\int P(x)dx}$, понимая под знаком интеграла не все множество первообразных, а одну произвольно выбранную первообразную.

Теорема 12.1. Общее решение линейного неоднородного уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y_{\text{общее}} = y_{\substack{\text{общее} \\ \text{однор.}}} + y_{\text{частное}}$.

Разберем примеры.

Пример 1. Решить уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$y' \underbrace{-\frac{3}{x}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{x}_{Q(x)}$ – линейное уравнение.

1. Рассмотрим однородное уравнение $y' - \frac{3y}{x} = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его.

$y \equiv 0$ является решением этого уравнения, при $y \neq 0$ получим

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x}$

$\ln|y| = 3\ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, получим

$y = |x|^3 \cdot C_2,\ C_2 = e^{C_1}$

$y = \pm x^3 \cdot C_2,\ C_2 = e^{C_1}.$

И окончательно получаем (так как $y \equiv 0$ является решением этого уравнения), что

$y = Cx^3, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2. Вернемся к исходному неоднородному уравнению $y' - \frac{3y}{x} = x$ и будем искать его решение в виде $y = C(x)x^3$, то есть сделаем вариацию постоянной. Получим, что

$y' = C' \cdot x^3 + C \cdot 3x^2$ и подставим это в уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x$, тогда

$C' \cdot x^3 + C \cdot 3x^2 - \frac{3Cx^3}{x} = x$

$C' \cdot x^3 = x$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow dC = \frac{dx}{x^2} \Longrightarrow \int dC = \int \frac{dx}{x^2}$

$C(x) = -\frac{1}{x} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

И тогда

$y(x) = C(x) \cdot x^3 = \left(-\frac{1}{x} + C_1\right) \cdot x^3 = -x^2 + C_1 x^3$, то есть

$y(x) = -x^2 + Cx^3, C \in \mathbb{R}$, где Cx^3 – общее решение однородного уравнения, $-x^2$ – частное решение неоднородного (исходного) уравнения.

Что значит, что $y = -x^2$ является частным решением уравнения $y' - \frac{3y}{x} = x$? Значит, при подстановке в уравнение превращает его в тождественное равенство. Подставим $y = -x^2$ в уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x$, получим

$-2x - \frac{3\cdot(-x^2)}{x} \equiv x$ (?)

$-2x + 3x \equiv x$ (!) – тождество, следовательно, $y = -x^2$ – частное решение этого уравнения.

Ответ: $y(x) = -x^2 + Cx^3, C \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Решить уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Решение.

1. Рассмотрим однородное уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его.

$y \equiv 0$ является решением этого уравнения, при $y \neq 0$ получим

$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x$

$\frac{dy}{y} = \frac{\sin x dx}{\cos x}$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, и так как $y \equiv 0$ является решением этого уравнения получим $y = \frac{C}{\cos x}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2. Вернемся к исходному неоднородному уравнению $y' - y\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ и будем искать его решение в виде $y = \frac{C(x)}{\cos x}$, то есть сделаем вариацию постоянной. Получим, что

$y' = \frac{C'\cos x - C\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$ и подставим это в уравнение $y' - y\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, тогда

$$\frac{C'}{\cos x} + \frac{C\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\frac{C'}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \Longrightarrow dC = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx \Longrightarrow \int dC = \int\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)dx$$

$$C(x) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

И тогда

$$y(x) = C(x)\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{\cos x} + 1 + \frac{C}{\cos x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = \frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{\cos x} + 1 + \frac{C}{\cos x},\ C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Значение интеграла $\int\frac{dx}{\sin x}$ либо надо помнить (он табличный), либо всякий раз считать, например, так:

$$\int\frac{1}{\sin x}dx = \int\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx =$$
$$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Пример 3. Решить уравнение $y' + xy = 1 + x^2$.

Решение.

1. Рассмотрим однородное уравнение (которое является уравнением с разделяющимися переменными)
   $y' + xy = 0$
   $\frac{dy}{y} = -xdx$ ($y \equiv 0$ потеряно)

$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем, не забываем про решение $y \equiv 0$, окончательно получаем $y = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2. Напомним, что общее решение линейного неоднородного уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y_{\text{общее}} = y_{\substack{\text{общее}\\ \text{однор.}}} + y_{\text{частное}}$, где $y_{\text{частное}}$ – какое-то (произвольное!) частное решение. Вариация постоянной позволяет найти это частное решение. В этом случае попытка применить вариацию постоянной приведет к очень непростому интегралу:

$y = C(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y' = C'^{e^{-\frac{x^2}{2}}} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}}$

$C'^{e^{-\frac{x^2}{2}}} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot Ce^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + x^2$

$\frac{dC}{dx} = (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$

$\int dC = \int (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx.$

Что же делать? Можно, конечно, попытаться как-то посчитать этот интеграл. Но мы поступим по-другому.

Вернемся к исходному уравнению $y' + xy = 1 + x^2$. Напомним, что наша задача сейчас заключается в том, чтобы найти какое-то частное решение этого уравнения. Легко видеть, что функция $y = x$ является решением этого уравнения, действительно,

$(x)' + x \cdot x \equiv 1 + x^2$, а поскольку $y_{\text{общее}} = y_{\substack{\text{общее}\\ \text{однор.}}} + y_{\text{частное}}$, получаем

$y_{\text{общее}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + x,\ C \in \mathbb{R}.$

Заметим, что это означает, что $\int (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C$. Это легко проверить $\left(\left(xe^{\frac{x^2}{2}} + C\right)' = (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}\right)$, но совсем не легко посчитать.

12.2. Уравнение Бернулли

Если дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где $n \neq 0, 1$, то уравнение называется ***уравнением Бернулли***. Заметим, что при $n = 0$ получается линейное уравнение, а при $n = 1$ получается уравнение с разделяющимися переменными.

Задача 1. Решить уравнение $xy' + y = -xy^2$.

Уравнение можно переписать в виде

$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{-1}_{Q(x)} \cdot y^2$ – уравнение Бернулли.

Рассмотрим однородное уравнение $xy' + y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение:

$|y| = |x|^{-1} \cdot e^C, \ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot x^{-1}, \ \ C > 0$

$y = \pm Cx^{-1}, \ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ в виде $y = \frac{C(x)}{x}$.

Подставим эту функцию в уравнение $xy' + y = -xy^2$.

Так как в этом случае $y' = \frac{C' \cdot x - C \cdot 1}{x^2} = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}$, то при подстановке в уравнение получаем

$\frac{C'}{x} \cdot x - \frac{C}{x^2} \cdot x + \frac{C}{x} \equiv -x\frac{C^2}{x^2} \Longrightarrow C' \equiv -\frac{C^2}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = -\frac{C^2}{x}$

$-\frac{dC}{C^2} = \frac{1}{x}dx$ (потеряно решение $C(x) \equiv 0$)

$\frac{1}{C(x)} = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad C(x) = \frac{1}{\ln|x|+C}, \ C \in \mathbb{R}$.

Заметим, что полученное множество функций не содержит «потерянное» решение $C(x) \equiv 0$, поэтому решение исходного уравнения Бернулли $y(x) \equiv 0$ (которое получается из $\frac{C(x)}{x}$ при $C(x) \equiv 0$) придется записывать отдельно.

Итак, общее решение уравнения Бернулли будет иметь вид:

$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x(\ln|x|+C)}$, $C \in \mathbb{R}$; $y(x) \equiv 0$.

Ответ: $y = \frac{1}{x(\ln|x|+C)}$, $C \in \mathbb{R}$; $y(x) \equiv 0$.

Замечание. В случае уравнения Бернулли общее решение уже не будет суммой общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения, что легко видеть на данном примере.

12.3. Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнения вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

где левая часть уравнения является полным дифференциалом du некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Тогда $du(x,y) = 0 \Longrightarrow u(x,y) \equiv C, \ C \in \mathbb{R}$.

Чтобы проверить, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, достаточно проверить выполнение условия

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$.

Решим уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Так как уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то выполняется

$$\underbrace{M(x,y)}_{\frac{\partial u}{\partial x}}dx + \underbrace{N(x,y)}_{\frac{\partial u}{\partial y}}dy = du.$$

И тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y).$$

Но в уравнении $\underbrace{M(x,y)}_{\frac{\partial u}{\partial x}}dx + \underbrace{N(x,y)}_{\frac{\partial u}{\partial y}}dy = du$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\left(\int M(x,y)dx+\varphi(y)\right)}{\partial y} = N(x,y).$$

Из этого уравнения находим $\varphi(y)$ и далее $u(x,y) \equiv C,\ C \in \mathbb{R}$.

Пример 1. Решить уравнение $\underbrace{(x+y+1)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x-y^2+3)}_{N(x,y)}dy = 0.$

Решение.

Проверим, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть, что $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Действительно,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1.$$

Так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y$, то

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \varphi(y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) =$$

$$= \int (x+y+1)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + \varphi(y),$$

то есть $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + \varphi(y)$.

Но $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, поэтому получаем

$$x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3$$

$\varphi'(y) = -y^2 + 3 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Следовательно,

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Но у нас по условию $du = 0 \Rightarrow u(x,y) \equiv C_1, C_1 \in \mathbb{R}$, поэтому

$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C = C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$

$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C, \quad C \in \mathbb{R}$

$3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 = C, C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 = C, C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Иногда студенты забывают о том, что функция $u(x,y)$ является вспомогательной, ее нет в условии задачи. А поэтому ее не может быть и в ответе.

Глава 13. *УРАВНЕНИЯ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА.*

13.1. Уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$

Подобные уравнения можно решать, последовательно их интегрируя. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить задачу Коши:

$y''' = \frac{6}{x^3}$

$y(1) = 2, \; y'(1) = 1, \; y''(1) = 1.$

В подобных задачах лучше не искать общее решение, зависящее от трех постоянных, а находить значения постоянных по мере понижения порядка уравнения.

$y''' = \frac{6}{x^3} \Rightarrow y'' = \int \frac{6}{x^3} dx = -\frac{3}{x^2} + C_1, \; C_1 \in \mathbb{R},$

но по условию $y''(1) = 1$, поэтому получаем, что

$1 = -\frac{3}{1^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow y'' = -\frac{3}{x^2} + 4.$

Далее,

$y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + 4\right) dx = \frac{3}{x} + 4x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$,

но по условию $y'(1) = 1$, поэтому получаем, что

$1 = \frac{3}{1} + 4 + C_2 \Rightarrow C_2 = -6 \Rightarrow y' = \frac{3}{x} + 4x - 6.$

И далее,

$y = \int \left(\frac{3}{x} + 4x - 6\right) dx = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + C_3,\ C_3 \in \mathbb{R}$,

но по условию $y(1) = 2$, поэтому окончательно получаем, что

$2 = 3\ln|1| + 2 - 6 + C_3 \Rightarrow C_3 = 6 \Rightarrow y = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + 6.$

Ответ: $y(x) = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + 6.$

Замечание. Как это было принято ранее, в дальнейшем мы будем обозначать произвольные постоянные одним символом, давая его описание в каждой строчке.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$y'' = 4\cos 2x$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

Понизим порядок уравнения

$y'' = 4\cos 2x \Rightarrow y' = 4\int \cos 2x\, dx = 2\sin 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$,

но по условию $y'(0) = 0$, поэтому получаем, что

$0 = 2\sin 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y' = 2\sin 2x.$

Далее, проинтегрируем это уравнение

$y = 2\int \sin 2x\, dx = -\cos 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$,

но по условию $y(0) = 0$, поэтому получаем, что

$0 = -\cos 0 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = -\cos 2x + 1.$

Ответ: $y(x) = -\cos 2x + 1.$

Пример 3. Решить уравнение $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

Понизим порядок уравнения

$y'' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y' = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

Далее,

$y = \int(\operatorname{arctg} x + C_1)dx = x \operatorname{arctg} x - \int x d \operatorname{arctg} x + C_1 x =$
$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + C_1 x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + C_1 x =$
$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Обращаем ваше внимание, что общее решение уравнения n-го порядка будет содержать ровно n произвольных постоянных.

13.2. Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$

Заметим, что это уравнение не содержит y. Сделаем замену $y' = p(x) \Longrightarrow y'' = p'(x)$, получим уравнение $F(x, p(x), p'(x)) = 0$ – уравнение 1-го порядка. Решим его, найдем $p(x)$. Зная $p(x)$, найдем $y(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

1) Сделаем замену $y' = p(x) \Longrightarrow y'' = p'(x)$, получим уравнение

$x^3 p' + x^2 p = 1$ – линейное уравнение 1-го порядка.

2) Рассмотрим однородное уравнение $xp' + p = 0 \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$

$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$ – (потеряно решение $p(x) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$p(x) = \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

3) Сделаем вариацию постоянной. Будем искать решение уравнения

$x^3 p' + x^2 p = 1$ в виде $p(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Так как в этом случае $p'(x) = \frac{C'x - C}{x^2}$, то после подстановки в уравнение $x^3 p' + x^2 p = 1$ получим, что

$x^3 \cdot \frac{C'x - C}{x^2} + x^2 \cdot \frac{C}{x} \equiv 1$

$C' x^2 \equiv 1 \Longrightarrow dC = \frac{1}{x^2} dx$

Проинтегрируем уравнение, получим

$C(x) = -\frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Поэтому $p(x) = \frac{C(x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

4) Сделаем обратную замену. Так как

$y' = p(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}$ $, C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}\right) dx =$

$= \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Глава 14. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

Рассмотрим уравнения вида

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = f(x) - \qquad (1)$$

неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами $\boldsymbol{n}$***-го порядка***.

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = 0 - \qquad (2)$$

однородное уравнение с постоянными коэффициентами $\boldsymbol{n}$***-го порядка***.

Теорема 14.1. Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения общего (неоднородного) уравнения.

Доказательство.

Пусть

$y_{\text{общее}}(x)$ – общее решение неоднородного уравнения (1)

$y_{\substack{\text{общее}\\ \text{однор}}}(x)$ – общее решение однородного уравнения (2)

$y_{\text{частн}}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (1),

тогда теорема утверждает, что

$y_{\text{общее}}(x) = y_{\substack{\text{общее}\\ \text{однор}}}(x) + y_{\text{частн}}(x),$

то есть при подстановке в уравнение (1) этой функции мы получим тождественное равенство.

Сократим обозначения: $y_{\underset{\text{однор}}{\text{общее}}}(x) = y_{\text{оо}}(x)$, $y_{\text{частн}}(x) = y_{\text{ч}}(x)$. Тогда должно выполняться, что

$$(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч}}(x))^{(n)} + p_1(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч}}(x))^{(n-1} + \dots + p_n\big(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч}}(x)\big) \equiv$$
$$\equiv f(x)\,.$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые, получим

$$\underbrace{\big(y_{\text{оо}}(x)\big)^{(n)} + p_1\big(y_{\text{оо}}(x)\big)^{(n-1} + \dots + p_n\big(y_{\text{оо}}(x)\big)}_{\equiv 0,\ \text{так как } y_{\text{оо}}(x)\ \text{– общее решение однородного уравнения}} +$$
$$+ \underbrace{(y_{\text{ч}}(x))^{(n)} + p_1(y_{\text{ч}}(x))^{(n-1} + \dots + p_n\big(y_{\text{ч}}(x)\big)}_{\equiv f(x), y_{\text{ч}}(x)\ \text{– частное решение неоднородного уравнения}} \equiv f(x) \text{ – а это верно.}$$

Следовательно, $y_{\text{общее}}(x) = y_{\underset{\text{однор}}{\text{общее}}}(x) + y_{\text{частн}}(x)$ – решение общего неоднородного уравнения.

Замечание. Мы не доказали, что других решений у этого уравнения нет.

Следствие. Если уравнение имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то общее решение этого уравнения имеет вид

$y_{\text{общее}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч},1}(x) + y_{\text{ч},2}(x)$, где

$y_{\text{ч},1}(x)$ – решение уравнения $y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f_1(x)$,

$y_{\text{ч},2}(x)$ – решение уравнения $y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f_2(x)$.

Действительно, подставим $y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч},1}(x) + y_{\text{ч},2}(x)$, раскроем скобки, перегруппируем слагаемые и получим

$$\Big(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч},1}(x) + y_{\text{ч},2}(x)\Big)^{(n)} + p_1\Big(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч},1}(x) + y_{\text{ч},2}(x)\Big)^{(n-1} + \dots + .$$
$$+ p_n\Big(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч},1}(x) + y_{\text{ч},2}(x)\Big) = f(x),$$

$$\underbrace{\big(y_{\text{оо}}(x)\big)^{(n)} + p_1\big(y_{\text{оо}}(x)\big)^{(n-1} + \dots + p_n\big(y_{\text{оо}}(x)\big)}_{\equiv 0,\ \text{так как } y_{\text{оо}}(x)\ \text{– общее решение однородного уравнения}} +$$
$$+ \underbrace{\big(y_{\text{ч},1}(x)\big)^{(n)} + p_1\big(y_{\text{ч},1}(x)\big)^{(n-1} + \dots + p_n\Big(y_{\text{ч},1}(x)\Big)}_{\equiv f_1(x), \text{так как } y_{\text{ч},1}(x) \text{– частное решение } 1\text{–го неоднор.уравнения}} +$$
$$+ \underbrace{\big(y_{\text{ч},2}(x)\big)^{(n)} + p_1\big(y_{\text{ч},2}(x)\big)^{(n-1} + \dots + p_n\Big(y_{\text{ч},2}(x)\Big)}_{\equiv f_2(x), \text{та как } y_{\text{ч},2}(x) \text{– частное решение } 2\text{–го неоднор уравнения}} \equiv f(x) \text{ – а это верно.}$$

Следовательно, $y_{\text{общее}}(x) = y_{\text{ч},1}(x) + y_{\text{ч},2}(x)$, – решение общего неоднородного уравнения.

Возникают вопросы.

1. Как найти общее решение однородного уравнения?
2. Как найти частное решение (или сразу общее) неоднородного уравнения?

14.1. Однородные дифференциальные уравнения произвольного порядка

Остановимся вначале на однородных уравнениях

$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = 0.$

Решение однородного уравнения рассмотрим на примере уравнения 2-го порядка:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{3}$$

Многочлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ называется ***характеристическим многочленом*** уравнения (3), а уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ называется уравнением относительно характеристического многочлена. В нашем случае характеристический многочлен – многочлен второй степени. Известно, что

1) если $D = p^2 - 4q > 0$, то квадратный трехчлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ имеет два различных действительных корня;
2) если $D = p^2 - 4q = 0$, то квадратный трехчлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ имеет два одинаковых действительных корня (не путайте понятия корня многочлена и корня уравнения относительно многочлена!);
3) если $D = p^2 - 4q < 0$, то квадратный трехчлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ имеет два комплексно-сопряженных корня.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

Пусть $D = p^2 - 4q > 0$, тогда λ_1 и λ_2 – различные действительные корни характеристического многочлена.

Теорема 14.2. Функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ – решения дифференциального уравнения (3) при $D > 0$.

Доказательство.

Докажем, что $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ – решение уравнения (3) (второе – аналогично).

Если $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, то $y_1{}'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$ и $y_1{}''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$, подставим это в уравнение (3), получим, что должно выполняться тождество

$$\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + p \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + q \cdot e^{\lambda_1 x} \equiv 0 \quad (?)$$

Поделим его на $e^{\lambda_1 x} > 0$, получим

$$\lambda_1^2 + p \cdot \lambda_1 + q = 0,$$

А это равенство выполняется, так как λ_1 – корень уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Следовательно, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ является решением уравнения (3).

Теорема 14.3. Функции $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ – решения дифференциального уравнения (3) при $D > 0$.

Доказательство.

Рассмотрим $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Тогда

$$y'(x) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y''(x) = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}\ .$$

Подставим полученные функции в уравнение (3), получим, что должно выполняться тождество

$$C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + p\left(C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\right) +$$
$$+ q\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \equiv 0.$$

Раскроем скобки, перегруппируем слагаемые и множители $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ вынесем за скобки. Получим

$$C_1 e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + p \cdot \lambda_1 + q) + C_2 e^{\lambda_2 x}(\lambda_2^2 + p \cdot \lambda_2 + q) \equiv 0.$$

Так как выражения в скобках равны нулю (числа λ_1 и λ_2 – корни уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$), то последнее тождественное равенство будет верным.

Теорема 14.4. Других решений у уравнения $y'' + py' + qy = 0$ при $D > 0$ нет (без доказательства).

Определение. Функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ называются фундаментальной системой решений уравнения $y'' + py' + qy = 0$ при $D > 0$.

Рассмотрим случай $D = p^2 - 4q = 0$. Тогда характеристический многочлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ имеет два одинаковых корня λ_1, λ_1 (соответствующее уравнение относительно характеристического многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет один корень λ_1).

Теорема 14.5. Функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ – решения дифференциального уравнения (14.3) при $D = 0$.

Доказательство.

Доказательство того, что $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ – решение уравнения (3) проводится аналогично тому, как это было сделано в теореме 14.2.

Докажем, что $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ также является решением уравнения (3) в этом случае.

$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$

$y_2' = e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$

$y_2'' = x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$

подставим это в уравнение (3), получим, что должно выполняться тождество

$$x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + p \cdot \left(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right) + q \cdot xe^{\lambda_1 x} \equiv 0 \quad (?)$$

Поделим его на $e^{\lambda_1 x} > 0$, перегруппируем слагаемые и получим

$$x(\lambda_1^2 + p \cdot \lambda_1 + q) + (2\lambda_1 + p) = 0.$$

Первая скобка равна нулю, так как λ_1 – корень уравнения
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Почему будет равна нулю вторая скобка?

Заметим, что если в уравнении $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ дискриминант $D = 0$, то корень уравнения $\lambda_1 = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-p}{2}$, то есть $2\lambda_1 = -p$, и поэтому вторая скобка тоже равна нулю.

Следовательно, $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ является решением уравнения (3) в этом случае.

Теорема 14.6. Функции $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 xe^{\lambda_1 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ – решения дифференциального уравнения (3) при $D = 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 14.3.

Теорема 14.7. Других решений у уравнения $y'' + py' + qy = 0$ при $D = 0$ нет (без доказательства).

Определение. Функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ называются фундаментальной системой решений уравнения $y'' + py' + qy = 0$ при $D = 0$.

Рассмотрим случай $D = p^2 - 4q < 0$. Тогда характеристический многочлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ имеет два комплексно-сопряженных корня λ_1, λ_2:

$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-p\pm\sqrt{-1\cdot(4q-p^2)}}{2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{(4q-p^2)}}{2} = \alpha \pm \beta i,$

где $\alpha = \frac{-p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{(4q-p^2)}}{2}$, $i^2 = -1$.

Теорема 14.8. Функции $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ – решения дифференциального уравнения (3) при $D < 0$.

Доказательство.

Докажем, что $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ является решением уравнения (3) в этом случае.

$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_2'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\sin\beta x,$

подставим это в уравнение (3), получим, что должно выполняться тождество

$$\alpha^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\sin\beta x +$$
$$+p\cdot(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) + q\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x \equiv 0 \quad (?)$$

Поделим его на $e^{\alpha x} > 0$, перегруппируем слагаемые и получим

$$(\alpha^2 + p\alpha + q - \beta^2)\sin\beta x + (2\alpha\beta + \beta p)\cos\beta x \equiv 0 \ \ (?)$$

Такое тождественное равенство будет выполняться, если выполняется система

$$\begin{cases}\alpha^2 + p\alpha + q - \beta^2 = 0\\ 2\alpha\beta + \beta p = 0.\end{cases} \qquad (4)$$

Почему такая система будет выполняться?

Разберемся, что значит, что, например, $\alpha + \beta i$ является корнем уравнения

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ при $D < 0$?

Подставим $\alpha + \beta i$ в уравнение, получим

$(\alpha + \beta i)^2 + p(\alpha + \beta i) + q = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 + p\alpha + p\beta i + q = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) + i(2\alpha\beta + p\beta) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q\\ 2\alpha\beta + p\beta.\end{cases}$$

То есть условие (4) выполняется.

Аналогично доказывается, что $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ – решения дифференциального уравнения (14.3) при $D < 0$.

Теорема 14.9. Функции $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ – решения дифференциального уравнения (3) при $D = 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 14.3.

Теорема 14.10. Других решений у уравнения $y'' + py' + qy = 0$ при $D < 0$ нет (без доказательства).

Определение. Функции $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ называются фундаментальной системой решений уравнения
$y'' + py' + qy = 0$ при $D < 0$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$

Получили, что характеристический многочлен имеет два различных действительных корня. Поэтому фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{3x}$.

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$

Получили, что характеристический многочлен имеет два одинаковых действительных корня (или «корень кратности два»). Поэтому фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = xe^{2x}$.

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$,

то есть уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2 + 3i,\ \lambda_2 = 2 - 3i$.

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x}\cos 3x$ и $y_2(x) = e^{2x}\sin 3x$.

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

или

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Замечание. Если дифференциальное уравнение имеет порядок больше 2, то ему будет соответствовать характеристический многочлен той же степени. Фундаментальная система решений будет получаться аналогично в зависимости от вида и кратности корней.

14.2. Неоднородные дифференциальные уравнения произвольного порядка

Вернемся к неоднородному уравнению

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = f(x) - \qquad (1)$$

неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка.

Напомним, что в этой задаче надо разобраться с тем, как найти частное решение этого уравнения (или сразу общее решение).

14.2.1. Вариация постоянных

Рассмотрим этот метод на примере.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = A\cos x + B\sin x\,,\ A, B \in \mathbb{R}$,

а фундаментальная система решений будет иметь вид:

$y_1(x) = \cos x \Rightarrow y_1'(x) = -\sin x$

$y_2(x) = \sin x \Rightarrow y_2'(x) = \cos x$

2) Для поиска общего решения исходного уравнения сделаем вариацию постоянных, то есть будем искать общее решение уравнения

$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ в виде $y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$.

Решим систему

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \frac{1}{\cos^3 x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\sin x = 0 \\ -A'\sin x + B'\cos x = \frac{1}{\cos^3 x} \end{cases}$$ – линейная система относительно A' и B'.

Эту систему лучше решать методом Крамера.

$\Delta = 1$, поэтому

$\Delta_{A'} = A' = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$\Delta_{B'} = B' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Относительно A' и B' получим систему

$$\begin{cases} A' = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \\ B' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x} + C_1,\ \ C_1 \in \mathbb{R} \\ B(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C_2 = \frac{\sin x}{\cos x} + C_2,\ \ C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

И тогда общее решение исходного неоднородного уравнения

$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ будет иметь вид

$y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x =$

$= \left(-\frac{1}{2\cos^2 x} + C_1\right)\cos x + \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C_2\right)\sin x =$

$= -\frac{1}{2\cos x} + C_1\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + C_2\sin x =$

$= \frac{2\sin^2 x - 1}{\cos x} + C_1\cos x + C_2\sin x = -\frac{\cos 2x}{\cos x} + C_1\cos x + C_2\sin x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = -\frac{\cos 2x}{\cos x} + C_1\cos x + C_2\sin x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

14.2.2. Неоднородные уравнения n-го порядка с правой частью специального вида

В предыдущем параграфе были решены неоднородные уравнения порядка ≥ 2 с помощью вариации постоянных, и было показано, что осуществление этого метода очень не просто. В некоторых ситуациях, когда правая часть является функцией специального вида, проходят более простые (в смысле вычислений) методы.

Итак, рассмотрим уравнение вида

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 14.11. Пусть правая часть этого уравнения $f(x) = P_m(x)$ – многочлен степени m и $\lambda = 0$ не является корнем характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Теорема 14.12. Пусть правая часть уравнения $f(x) = P_m(x)$ – многочлен степени m и $\lambda = 0$ является корнем кратности s характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = x^s Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

Решение.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2 + i,\ \lambda_2 = -2 - i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде многочлена 2-й степени:

$y_ч(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$y'_ч = 2ax + b$

$y''_ч = 2a.$

Подставим это в исходное уравнение, получим:

$2a + 4(2ax + b\ ) + 5(ax^2 + bx + c\ ) \equiv 5x^2 - 32x + 5 \Leftrightarrow$

$5ax^2 + (8a + 5b)x + 2a + 4b + 5c \equiv 5x^2 - 32x + 5.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 5a & = 5 \\ 8a + 5b & = -32 \\ 2a + 4b + 5c & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 5b = -40 \\ 4b + 5c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 7\ . \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид: $y_ч(x) = x^2 - 8x + 7$, а общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7,$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 3y' = 9x.$

Решение.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 3y' = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1 + C_2 e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности один характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{ч}(x) = x^1(ax+b) = ax^2 + bx,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y'_{ч} = 2ax + b$

$y''_{ч} = 2a.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 3y' = 9x$, получим:

$2a + 3(2ax + b\ ) \equiv 9x \Leftrightarrow$

$6ax + 2a + 3b \equiv 9x.$

Два многочлена тождественно равны ⟺ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 6a = 9 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{ч}(x) = x\left(\frac{3}{2}x - 1\right) = \frac{3}{2}x^2 - x$, а общее решение уравнения

$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_{ч}(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим уравнение вида

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x),$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n \in \mathbb{R}$ с другой правой частью.

Теорема 14.13. Пусть правая часть уравнения $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x), \alpha \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ – многочлен степени m, и α не является корнем характеристического многочлена, тогда $y_{ч}(x) = e^{\alpha x}Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Теорема 14.14. Пусть правая часть уравнения $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ – многочлен степени m, и α является корнем кратности s характеристического многочлена, тогда $y_{ч}(x) = e^{\alpha x}x^sQ_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = 2$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = a e^{2x},\ a \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = 2a e^{2x}$

$y_{\text{ч}}'' = 4a e^{2x}.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, получим:

$4ae^{2x} + 2 \cdot 2ae^{2x} + ae^{2x} \equiv e^{2x} \Leftrightarrow$

$9a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}.$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{9} e^{2x}$, а общее решение исходного уравнения $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = 3$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = a x^1 e^{3x},\ a \in \mathbb{R}$

$y_ч' = ae^{3x} + 3axe^{3x}$

$y_ч'' = 6ae^{3x} + 9axe^{3x}$.

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$, получим:

$6ae^{3x} + 9axe^{3x} - 7(ae^{3x} + 3axe^{3x}) + 12 \cdot axe^{3x} \equiv -e^{3x} \Leftrightarrow$

$-a + 0 \cdot ax \equiv -1 \Leftrightarrow$

$-a = -1 \Leftrightarrow a = 1$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = xe^{3x}$, а общее решение исходного уравнения $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{4x} + xe^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{4x} + xe^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Теорема 14.15. Пусть правая часть уравнения

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x),$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n \in \mathbb{R}$,

$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_k(x), P_m(x)$ – многочлены степени k и m соответственно, и $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = e^{\alpha x}\big(Q_p(x)\cos\beta x + R_p(x)\sin\beta x\big)$, где $Q_p(x)$, $R_p(x)$ – многочлены степени $p = max\{k, m\}$.

Теорема 14.16. Пусть правая часть уравнения

$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_k(x), P_m(x)$ – многочлены степени k и m соответственно, и $\alpha \pm \beta i$ являются корнями кратности s характеристического многочлена, тогда
$y_ч(x) = x^se^{\alpha x}\big(Q_p(x)\cos\beta x + R_p(x)\sin\beta x\big)$, где $Q_p(x)$, $R_p(x)$ – многочлены степени $p = max\{k, m\}$.

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - 2i$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm i$ не являются корнями характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = a\cos x + b\sin x,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = -a\sin x + b\cos x$

$y_{\text{ч}}'' = -a\cos x - b\sin x.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$, получим:

$$-a\cos x - b\sin x - 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) \equiv$$
$$\equiv 4\cos x + 2\sin x \Leftrightarrow$$

$$4a\cos x - 2b\cos x + 2a\sin x + 4b\sin x \equiv 4\cos x + 2\sin x.$$

Напомним ***теорему:*** $\boldsymbol{P_k(x)\cos x + P_m(x)\sin x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}}$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} 4a - 2b = 4 \\ 2a + 4b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = \cos x$, а общее решение исходного уравнения

$y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Пример 6. Решить уравнение $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x.$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 2i,\ \lambda_4 = -2i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm i$ являются корнями кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$ будем искать в виде:

$y_ч(x) = x(a\cos x + b\sin x),\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_ч'' = 2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x)$

$y_ч^{IV} = 4(a\sin x - b\cos x) + x(a\cos x + b\sin x).$

Напомним использованную нами ***теорему (формула Лейбница)***:

$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $u(x), v(x) \in C^n(\mathbb{R})$.

Подставим это в исходное уравнение $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$, получим:

$$4(a\sin x - b\cos x) + x(a\cos x + b\sin x) +$$
$$+5\big(2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x)\big) + 4x(a\cos x + b\sin x) \equiv$$
$$\equiv 3\sin x \Leftrightarrow$$

$$-6a\sin x + 6b\cos x \equiv 3\sin x.$$

$$P_k(x)\cos x + P_m(x)\sin x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} -6a = 3 \\ 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos x\right) = -\frac{x}{2}\cos x$, а общее решение исходного уравнения $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$ запишется в виде

$$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) =$$
$$= C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - \frac{x}{2}\cos x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - \frac{x}{2}\cos x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Пример 7. Решить уравнение $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm i$ являются корнями кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = x(a\cos x + b\sin x),\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = (a\cos x + b\sin x) + x(-a\sin x + b\cos x)$

$y_{\text{ч}}'' = 2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x)$

$y_{\text{ч}}''' = 3(-a\cos x - b\sin x) + x(a\sin x - b\cos x).$

Здесь мы вновь использовали формулу Лейбница.

Подставим это в исходное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$, получим:

$-3a\cos x - 3b\sin x + ax\sin x - bx\cos x + 2a\sin x - 2b\cos x +$
$+ax\cos x + bx\sin x + a\cos x + b\sin x + -ax\sin x + bx\cos x -$
$-ax\cos x - bx\sin x \equiv 2\cos x \Leftrightarrow$

$-2a\cos x - 2b\sin x + 2a\sin x - 2b\cos x \equiv 2\cos x.$

$$P_k(x)\cos x + P_m(x)\sin x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} -2a - 2b = 2 \\ \ \ 2a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = -\frac{x}{2}(\cos x + \sin x)$, а общее решение исходного уравнения $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) =$
$= C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 e^x - \frac{x}{2}(\cos x + \sin x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 e^x - \frac{x}{2}(\cos x + \sin x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Замечание. Если правая часть уравнения $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y_{ч}(x) = y_{ч_1}(x) + y_{ч_2}(x)$, где $y_{ч_1}(x)$ и $y_{ч_2}(x)$ – частные решения уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$.

Пример 8. Решить уравнение $y'' + y = x + 2e^x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Найдем частное решение задачи $y'' + y = x$.

Так как $\alpha = 0$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение неоднородного уравнения $y'' + y = x$ будем искать в виде:

$y_{ч_1}(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y''_{ч_1} = 0$.

Подставим это в уравнение $y'' + y = x$ и получим

$$0 + ax + b \equiv x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{ч_1}(x) = x$.

3) Найдем частное решение задачи $y'' + y = 2e^x$.

Так как $\alpha = 1$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение неоднородного уравнения $y'' + y = 2e^x$ будем искать в виде:

$y_{ч_2}(x) = ae^x,\ a \in \mathbb{R}$

$y''_{ч_2} = ae^x$.

Подставим это в уравнение $y'' + y = 2e^x$ и получим

$ae^x + ae^x \equiv 2e^x \Leftrightarrow a = 1$.

Следовательно, $y_{ч_2}(x) = e^x$.

Поэтому общее решение исходного уравнения $y'' + y = x + 2e^x$ запишется в виде:

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}_1}(x) + y_{\text{ч}_2}(x) =$
$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Глава 15. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

15.1. Однородные системы с двумя неизвестными

Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ – это значит найти пару функций $(x(t), y(t))$, которые при подстановке в систему превращают уравнения системы в тождества.

15.1.1. Сведение к уравнению второго порядка

Пример 1. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \\ \ddot{y} = 3\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - 2x = y \\ \quad 3x = -4y + \dot{y} \\ \ddot{y} = 3\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3x = -4y + \dot{y} \\ 3\dot{x} = 3y - 8y + 2\dot{y} \\ \ddot{y} = -5y + 2\dot{y} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -4y + \dot{y} \\ 3\dot{x} = -5y + 2\dot{y} \\ \ddot{y} = 6\dot{y} - 5y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$y'' - 6y' + 5y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5.$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$ запишется в виде:

$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{3}(-4y + \dot{y})$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = \frac{1}{3}(-4C_1e^t - 4C_2e^{5t} + C_1e^t + 5C_2e^{5t}) = -C_1e^t + \frac{C_2}{3}e^{5t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^t + \frac{C_2}{3}e^{5t} \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{5t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = -C_1e^t + \frac{C_2}{3}e^{5t} \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{5t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Замечание. Сразу заметим, что, во-первых, ответ к этой задаче можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y(t) = C_1e^t + 3C_2e^{5t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

сделав замену $C_2 \to 3C_2$, или даже к виду

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y(t) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

добавив замену $C_1 \to -C_1$.

Во-вторых, можно дифференцировать не второе, а первое уравнение системы, получать дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $x(t)$ и лишь потом находить $y(t)$. Легко видеть, что тогда в этой задаче мы получим ответ именно в виде (*).

Вывод. При решении линейных систем ответ может быть записан по-разному, поэтому не совпадение вашего ответа с ответом в учебнике не означает, что вы решили задачу неправильно.

Мы в дальнейшем не будем сосредотачиваться на «красоте» записи ответа, чтобы не тратить на это силы и время…

Пример 2. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y\,. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y \\ \ddot{y} = 2\dot{x} - \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} - 3x = -2y \\ \quad 2x = y + \dot{y} \\ \ddot{y} = 2\dot{x} - \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x = y + \dot{y} \\ 2\dot{x} = -4y + 3y + 3\dot{y} \\ \ddot{y} = -4y + 3y + 3\dot{y} - \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x = y + \dot{y} \\ 2\dot{x} = -4y + 3y + 3\dot{y} \\ \ddot{y} = 2\dot{y} - y\,.\end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{2}(y + \dot{y})$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^t + C_2 t e^t + C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^t + C_2 t e^t,$$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases}x(t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^t + C_2 t e^t \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t\end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases}x(t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^t + C_2 t e^t \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t\end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Пример 3. Решить однородную систему $\begin{cases}\dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y.\end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases}\dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \\ \ddot{y} = \dot{x} + \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} + x = -5y \\ \quad x = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} + \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x = -y + \dot{y} \\ \dot{x} = -\dot{y} - 4y \\ \ddot{y} = \dot{y} - 4y + \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -y + \dot{y} \\ \dot{x} = -4y - \dot{y} \\ \ddot{y} = -4y\,.\end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' + 4y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = -y + \dot{y}$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = -C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t - 2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t =$$
$$= (-C_1 + 2C_2) \cos 2t + (-2C_1 - C_2) \sin 2t\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases}x(t) = (-C_1 + 2C_2) \cos 2t + (-2C_1 - C_2) \sin 2t \\ y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\end{cases},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases}x(t) = (-C_1 + 2C_2) \cos 2t + (-2C_1 - C_2) \sin 2t \\ y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\end{cases},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Иногда этот метод проходит и при решении ***однородных систем дифференциальных уравнений более высокого порядка***. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример 4. Решить однородную систему $\begin{cases}\ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x\,.\end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t два раза и получим уравнение 4-го порядка относительно y:

$$\begin{cases}\ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x \\ (\ddot{\ddot{y}}) = \ddot{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ddot{x} = y \\ x = \ddot{y} \\ y^{(4)} = y\,.\end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$y^{(4)} - y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_{3,4} = \pm i.$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y^{(4)} - y = 0$ запишется в виде:

$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Функцию $x(t)$ найдем из второго уравнения последней системы:

$x(t) = \ddot{y}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t,\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \end{cases},\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \end{cases},\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

15.2. Использование собственных значений и собственных векторов матрицы коэффициентов для решения однородной системы

Решать однородные системы относительно 3-х и более неизвестных функций предыдущим методом очень громоздко (хотя иногда он может быть использован для достаточно простых систем). Рассмотрим другой метод. Причем, для упрощения понимания рассмотрим его сначала на примерах систем с 2-мя неизвестными.

Поскольку в программу по линейной алгебре для химического факультета входит только нахождение собственных значений и собственных векторов матриц (и не входит нахождение присоединенных векторов), то предлагаемым методом можно решить только те системы, в которых основная матрица будет иметь ровно 2 (для систем с двумя неизвестными) и 3 (для систем с тремя неизвестными) линейно независимых собственных вектора.

Замечание. Этим методом будут решены и некоторые задачи, решенные в предыдущем параграфе. У вас есть возможность сравнить эти решения.

Пример 5. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2)$:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 1) \Rightarrow$$

$$p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = -p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (1, -1).$$

Рассмотрим $\lambda_2 = 5$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2)$:

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 2-5 & 1 \\ 3 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (-3 \quad 1) \Rightarrow$$

$$-3p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = 3p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (1{,}3).$$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \binom{1}{-1} e^t + C_2 \binom{1}{3} e^{5t},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \binom{1}{-1} e^t + C_2 \binom{1}{3} e^{5t},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Мы уже отмечали, что ответ в таких задачах можно записывать по-разному. В первой задаче ответ записан в двух видах. В дальнейшем мы будем записывать ответ в векторной форме, поскольку он естественным образом так и возникает.

Пример 6. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y - 2z \\ \dot{y} = 10x + 4y + 2z \\ \dot{z} = 2x + y + 3z\,. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 10 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$|A-\lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 & -2 \\ 10 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-5-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - 8 - 20 + 4(4-\lambda) - 2(-5-\lambda) + 20(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2+\lambda-20)(3-\lambda) - 28 + 16 - 4\lambda + 10 + 2\lambda + 60 - 20\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 20\lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda - 60 - 12 - 2\lambda + 70 - 20\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-2) - (\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)(\lambda-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -5-1 & -2 & -2 \\ 10 & 4-1 & 2 \\ 2 & 1 & 3-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 10 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_3 \\ p_2 = -4p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_1 = (1, -4, 1).$$

Рассмотрим $\lambda_2 = -1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -5+1 & -2 & -2 \\ 10 & 4+1 & 2 \\ 2 & 1 & 3+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 10 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_3 = 0 \\ p_2 = -2p_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_2 = (1, -2, 0).$$

Рассмотрим $\lambda_3 = 2$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_3 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A-\lambda_3 E) = \begin{pmatrix} -5-2 & -2 & -2 \\ 10 & 4-2 & 2 \\ 2 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & -2 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 = 0 \\ p_2 = -p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_3 = (0, -1, 1).$$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \bar{u}_3 e^{\lambda_3 t} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Пример 7. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 4z \\ \dot{y} = -8x - 3y + 2z \\ \dot{z} = -2x - 4y + 6z \,. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -8 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -4 \\ -8 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1-\lambda)(-3-\lambda)(6-\lambda) - 8 - 128 + 8(\lambda+3) + 8(-1-\lambda) + 16(6-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + 4\lambda + 3)(6-\lambda) - 136 + 8\lambda + 24 - 8 - 8\lambda + 96 - 16\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 6\lambda^2 + 24\lambda + 18 - 24 - 16\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Очевидно, что $\lambda = 1$ является корнем этого уравнения. Поделив «столбиком» $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$ на $\lambda - 1$, получим

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = -2.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -1-1 & 2 & -4 \\ -8 & -3-1 & 2 \\ -2 & -4 & 6-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 18 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 = -p_3 \\ 2p_2 = 3p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_1 = (-1,3,2).$$

Рассмотрим $\lambda_2 = 3$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -1-3 & 2 & -4 \\ -8 & -3-3 & 2 \\ -2 & -4 & 6-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -8 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 = -p_3 \\ p_2 = p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_2 = (-1,2,2).$$

Рассмотрим $\lambda_3 = -2$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_3 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_3 E) = \begin{pmatrix} -1+2 & 2 & -4 \\ -8 & -3+2 & 2 \\ -2 & -4 & 6+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -8 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 2p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_3 = (0,2,1).$$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \bar{u}_3 e^{\lambda_3 t} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

15.3. Неоднородные системы с двумя неизвестными

Решить неоднородную систему $\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{cases}$ – это значит найти пару функций $(x(t), y(t))$, которые при подстановке в систему превращают уравнения системы в тождества. Такие системы решаются методом вариации постоянных. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 8. Решить неоднородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2\sin t} \end{cases}$.

1. Рассмотрим сначала однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \\ \ddot{y} = \dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - x = -2y \\ x = y + \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = y + \dot{y} \\ \dot{x} = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = -y + \dot{y} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \dot{y} \\ \dot{x} = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = -y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' + y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = y + \dot{y}$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_1 \cos t - C_2 \sin t =$$
$$= (C_1 - C_2)\sin t + (C_1 + C_2)\cos t\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 - C_2)\sin t + (C_1 + C_2)\cos t \\ y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Проделаем вариацию постоянных, то есть будем искать решение системы $\begin{cases}\dot{x} = x - 2y\\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2\sin t}\end{cases}$ в виде

$$\begin{cases}x(t) = (C_1(t) - C_2(t))\sin t + (C_1(t) + C_2(t))\cos t\\ y(t) = C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t\end{cases}, \qquad (*)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – некоторые функции.

Подставим функции (*) в исходную систему, получим систему тождеств:

$$\begin{cases}(C_1' + C_2')\cos t - (C_1 + C_2)\sin t + (C_1' - C_2')\sin t + (C_1 - C_2)\cos t \equiv\\ \qquad \equiv (C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t - 2C_1\sin t - 2C_2\cos t\\ C_1'\sin t + C_1\cos t + C_2'\cos t - C_2\sin t \equiv\\ \qquad \equiv (C_1 - C_2)\sin t + (C_1 + C_2)\cos t - C_1\sin t - C_2\cos t + \frac{1}{2\sin t}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(C_1' + C_2')\cos t + (C_1' - C_2')\sin t = 0\\ C_1'\sin t + C_2'\cos t = \frac{1}{2\sin t}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}C_1'(\cos t + \sin t) + C_2'(\cos t - \sin t) = 0\\ C_1'\sin t \qquad\qquad + C_2'\cos t \qquad\quad = \frac{1}{2\sin t}\end{cases}.$$

Мы получили линейную систему относительно функций C_1' и C_2'. Эту систему можно решить методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix}\cos t + \sin t & \cos t - \sin t\\ \sin t & \cos t\end{vmatrix} =$$
$$= (\cos t + \sin t)\cos t - (\cos t - \sin t)\sin t \equiv 1,$$

поэтому

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix}0 & \cos t - \sin t\\ \frac{1}{2\sin t} & \cos t\end{vmatrix} = -\frac{\cos t - \sin t}{2\sin t} = C_1',$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix}\cos t + \sin t & 0\\ \sin t & \frac{1}{2\sin t}\end{vmatrix} = \frac{\cos t + \sin t}{2\sin t} = C_2'.$$

Проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения, получим:

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos t - \sin t}{2\sin t}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{d\sin t}{\sin t} + \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_1,\ A_1 \in \mathbb{R}.$$
$$C_2(t) = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t + \sin t}{2\sin t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin t}{\sin t} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_2,\ A_2 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ будут иметь вид:

$$x(t) = (C_1(t) - C_2(t))\sin t + (C_1(t) + C_2(t))\cos t =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_1 - \frac{1}{2}\ln|\sin t| - \frac{t}{2} - A_2\right)\sin t +$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_1 + \frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_2\right)\cos t =$$
$$= (-\ln|\sin t| + A_1 - A_2)\sin t + (t + A_1 + A_2)\cos t,$$

$$y(t) = C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_1\right)\sin t + \left(\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_2\right)\cos t\,,\ A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = (-\ln|\sin t| + A_1 - A_2)\sin t + (t + A_1 + A_2)\cos t \\ y(t) = \left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_1\right)\sin t + \left(\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_2\right)\cos t \end{cases}, A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Пример 9. Решить неоднородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \frac{1}{1+e^t} \\ \dot{y} = -2x + 4y - \frac{1}{1+e^t}. \end{cases}$

1. Рассмотрим сначала однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 4y \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} + 2x = 4y \\ \quad 2x = 4y - \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 2x = 4y - \dot{y} \\ \dot{x} = \dot{y} \\ \ddot{y} = 2\dot{y}\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 2y' = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{2}(4y - \dot{y})$:

$x(t) = \frac{1}{2}(4C_1 + 4C_2e^{2t} - 2C_2e^{2t}) = \frac{1}{2}(4C_1 + 2C_2e^{2t}) = 2C_1 + C_2e^{2t}$,
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 + C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1 + C_2e^{2t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Проделаем вариацию постоянных, то есть будем искать решение системы $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \frac{1}{1+e^t} \\ \dot{y} = -2x + 4y - \frac{1}{1+e^t} \end{cases}$ в виде

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1(t) + C_2(t)e^{2t} \\ y(t) = C_1(t) + C_2(t)e^{2t} \end{cases}, \qquad (*)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – некоторые функции.

Подставим функции (*) в исходную систему, получим систему тождеств:

$$\begin{cases} 2C_1' + C_2'e^{2t} + 2C_2e^{2t} = -4C_1 - 2C_2e^{2t} + 4C_1 + 4C_2e^{2t} + \frac{1}{1+e^t} \\ C_1' + C_2'e^{2t} + 2C_2e^{2t} = -4C_1 - 2C_2e^{2t} + 4C_1 + 4C_2e^{2t} - \frac{1}{1+e^t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2C_1' + C_2'e^{2t} = \frac{1}{1+e^t} \\ C_1' + C_2'e^{2t} = -\frac{1}{1+e^t} \end{cases}.$$

Мы получили линейную систему относительно функций C_1' и C_2'. Эту систему можно решить методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+e^t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{1+e^t} & e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{2e^{2t}}{1+e^t},$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{1+e^t} \\ 1 & -\frac{1}{1+e^t} \end{vmatrix} = \frac{-3}{1+e^t}.$$

Поэтому

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = \frac{2}{1+e^t},$$

$C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{-3}{e^{2t}(1+e^t)}$.

Проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения, получим:

$$C_1(t) = 2\int \frac{dt}{1+e^t} = \left| \begin{matrix} e^t = u, t = \ln u, \\ dt = \frac{du}{u} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{du}{u(u+1)} =$$
$$= 2\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1}\right) = 2\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + A_1 = 2\ln\left|\frac{e^t}{e^t+1}\right| + A_1 =$$
$$= 2\ln e^t - 2\ln(e^t+1) + A_1 = 2t - 2\ln(e^t+1) + A_1,\ A_1 \in \mathbb{R}.$$

$$C_2(t) = -3\int \frac{dt}{e^{2t}(1+e^t)} = \left| \begin{matrix} e^t = u, t = \ln u, \\ dt = \frac{du}{u} \end{matrix} \right| = -3\int \frac{du}{u^3(u+1)} =$$
$$= -3\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u+1}\right) =$$
$$= -3\left(\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2}\right) + A_2 = -3t + 3\ln(e^t+1) - \frac{3}{e^t} + \frac{3}{2e^{2t}} + A_2,\ A_2 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ будут иметь вид:

$$x(t) = 2C_1(t) + C_2(t)e^{2t} =$$
$$= 2(2t - 2\ln(e^t+1) + A_1) + \left(-3t + 3\ln(e^t+1) - \frac{3}{e^t} + \frac{3}{2e^{2t}} + A_2\right)e^{2t} =$$
$$= 4t - 4\ln(e^t+1) + 2A_1 - 3te^{2t} + 3e^{2t}\ln(e^t+1) - 3e^t + \frac{3}{2} + A_2e^{2t} =$$
$$= (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 4t - 4\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + 2A_1,$$

$$y(t) = C_1(t) + C_2(t)e^{2t} =$$
$$= 2t - 2\ln(e^t+1) + A_1 + \left(-3t + 3\ln(e^t+1) - \frac{3}{e^t} + \frac{3}{2e^{2t}} + A_2\right)e^{2t} =$$
$$= 2t - 2\ln(e^t+1) + A_1 - 3te^{2t} + 3e^{2t}\ln(e^t+1) - 3e^t + \frac{3}{2} + A_2e^{2t} =$$
$$= (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 2t - 2\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + A_1, A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 4t - 4\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + 2A_1 \\ y(t) = (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 2t - 2\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + A_1 \end{cases},$$

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}$.