МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
(для бакалавриата)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов бакалавриата.

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления производных «по определению», применения производной и дифференциала.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть компакт $M \subset \mathbb{R}^2$ является криволинейной трапецией

$$M = \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), y_1(x), y_2(x) \in C([a, b]) \end{cases}$$

И пусть функция $f(x, y)$ является непрерывной на компакте M.

Тогда $\iint_M f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$

В следующих задачах будут приведены (и изображены) различные примеры криволинейных трапеций, то есть фигур, у которых две стороны параллельны какой-то координатной оси (или вырождаются в точку), а две другие являются графиками соответствующей функции другой переменной. Умение нарисовать на плоскости фигуру, ограниченную кривыми, которые являются графиками функций $y = f(x)$, $x = g(y)$ или множествами точек, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x, y) = 0$, является очень важным (это проходят в первом семестре).

Когда мы учились считать частные производные функции двух аргументов $f(x, y)$, то привыкали к правилу: если мы считаем частную производную по x, то для нас x является переменной, а y является постоянной величиной. Наоборот, если мы считаем частную производную по y, то для нас y является переменной, а x является постоянной величиной. При интегрировании действуем точно так же. Поскольку при вычислении двойных интегралов будут возникать «подстановки по переменной x» и «подстановки по переменной y», то поначалу лучше записывать, по какой именно переменной делается подстановка.

Кроме того, отметим, что $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dxf(x)$, так как множители можно записывать в разном порядке.

В следующих задачах вычислить повторные интегралы.

Задача 1. Вычислить $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+y)dx$.

Решение.

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+y)dx = \int_0^2 dy\left(\left(\frac{x^3}{3}+2yx\right)\Big|_{x=0}^{x=1}\right) =$$
$$= \int_0^2 dy\left(\left(\frac{1}{3}+2y\right)-0\right) = \left(\frac{y}{3}+y^2\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{2}{3}+4\right)-0 = 4\frac{2}{3}.$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$.

Задача 2. Вычислить $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$.

Решение.

$$\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx = \int_{-3}^{3} dy\left(\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_{x=y^2-4}^{x=5}\right) =$$
$$= \int_{-3}^{3} dy\left(\left(\frac{25}{2}+10y\right)-\left(\frac{(y^2-4)^2}{2}+2y(y^2-4)\right)\right) =$$
$$= \int_{-3}^{3} dy\left(\left(\frac{25}{2}+10y\right)-\frac{(y^2-4)^2}{2}-2y(y^2-4)\right) =$$
$$= \int_{-3}^{3} dy\left(\frac{25}{2}+10y-\frac{y^4}{2}+4y^2-8-2y^3+8y\right) =$$
$$= \int_{-3}^{3} dy\left(\underbrace{\frac{25}{2}-\frac{y^4}{2}+4y^2-8}_{\text{четные}}+\underbrace{10y-2y^3+8y}_{\text{нечетные}}\right) =$$
$$= 2\int_0^3 dy\left(\frac{25}{2}-\frac{y^4}{2}+4y^2-8\right) = \int_0^3 dy(9-y^4+8y^2) = \left(9y-\frac{y^5}{5}+\frac{8y^3}{3}\right)\Big|_0^3 =$$
$$= 27-\frac{243}{5}+72-0 = 99-48\frac{1}{5} = 50\frac{2}{5}.$$

Ответ: $50\frac{2}{5}$.

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что выполняется (это было доказано на 1 курсе):

если $f(x)$ – ***четная функция***, определенная на симметричном отрезке $[-a,a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$,

если $f(x)$ – ***нечетная функция***, определенная на симметричном отрезке $[-a,a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Задача 3. Вычислить $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} r dr$.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=a\sin\varphi}^{r=a} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi (a^2 - a^2\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi (1-\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + \underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\right) d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^2}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Замечание. Напомним, что у функций $\sin px$ и $\cos px$ наименьший период равен $T_0 = \frac{2\pi}{p}$, поэтому числа $\frac{2\pi}{p}\cdot m, m \in \mathbb{N}$ тоже являются периодами, и при интегрировании этих функций по отрезку, длина которого равна $T = \frac{2\pi}{p}\cdot m$, $m \in \mathbb{N}$, получается в результате 0. Проверьте это и запомните… или всякий раз считайте интеграл…

Пример. У функции $\sin 3x$ наименьший период равен $\frac{2\pi}{3}$, и поэтому, например, $\int_0^{\frac{4\pi}{3}} \sin 3x\, dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}\cdot 2} \sin 3x\, dx = 0$.

При вычислении кратных интегралов очень важным является умение нарисовать нужную «картинку» и правильно расставить пределы интегрирования в повторных интегралах. Сначала надо научиться выделять из условия уравнения кривых, ограничивающих заданный компакт.

В следующих задачах записать уравнения линий, ограничивающих компакты, и изобразить эти компакты.

Задача 4. Рассмотрим $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y) dy$.

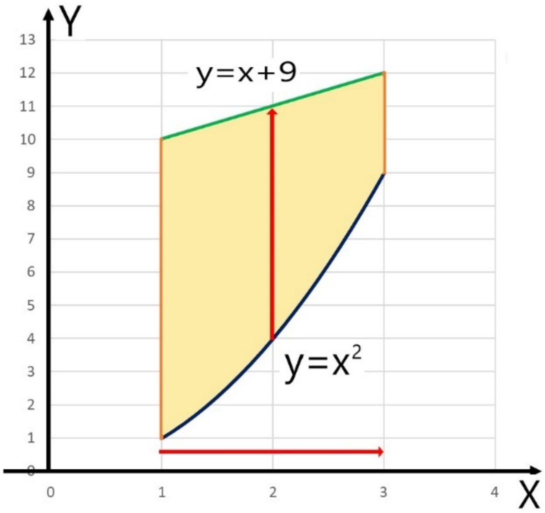


Рис. к задаче 4.

В этом интеграле пределы интегрирования понимаются так:
когда x изменяется от $x = 1$ до $x = 3$,
тогда y изменяется от $y = x^2$ до $y = x + 9$,
то есть, при каждом x от 1 до 3, значение переменной y меняется от значения y на линии $y = x^2$ до значения y на линии $y = x + 9$.

Такую «картинку» со стрелками советуем на первых порах рисовать всегда.

Задача 5. Рассмотрим $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)dx$. В этом интеграле пределы интегрирования понимаются так:
когда y: от $y = -6$ до $y = 2$
тогда x: от $x = \frac{y^2}{4} - 1$ до $x = 2 - y$.
Найдем точки пересечения кривых $x = \frac{y^2}{4} - 1$ и $x = 2 - y$, для чего решим систему

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4} - 1 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = \frac{y^2}{4} - 1 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 12 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Получаем «картинку»:

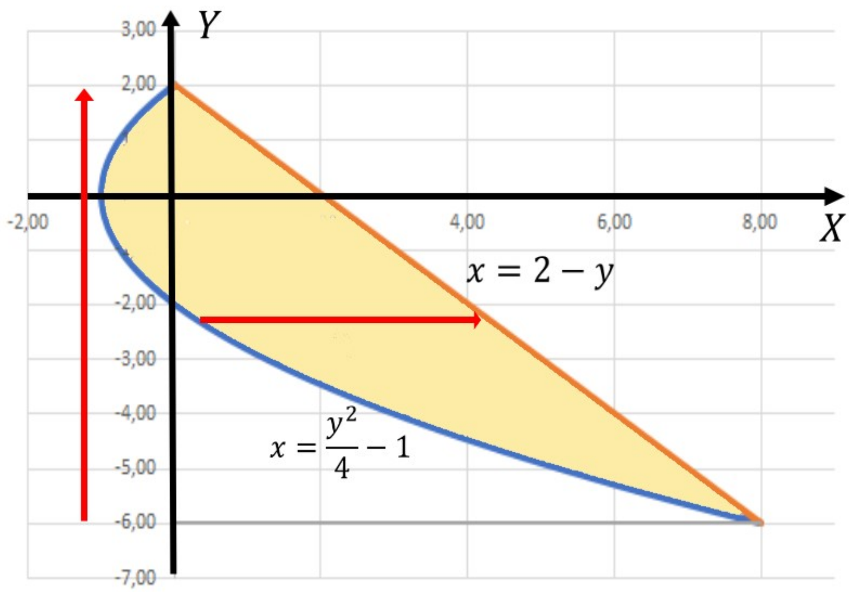


Рис. к задаче 5.

Замечание. Пусть компакт M является криволинейной трапецией

$$M = \begin{Bmatrix} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), y_1(x), y_2(x) \in C([a, b]) \end{Bmatrix}$$

и одновременно

$$M = \begin{Bmatrix} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), x_1(y), x_2(y) \in C[c, d] \end{Bmatrix}.$$

И пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте M.
Тогда выполняется ***теорема Фубини***:

$\iint_M f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx,$

то есть можно поменять порядок интегрирования.

В следующих задачах надо поменять порядок интегрирования. Для нас важно научиться этому в первую очередь для того, чтобы в последствии разумнее выбирать порядок интегрирования, так как от этого будет зависеть сложность решения задачи.

Задача 6. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx = \int_?^? dx \int_?^? f(x, y)dy$, то есть задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: y: от $y = 0$ до $y = 1$

x: от $x = y$ до $x = \sqrt{y}$.

Получаем «картинку»:

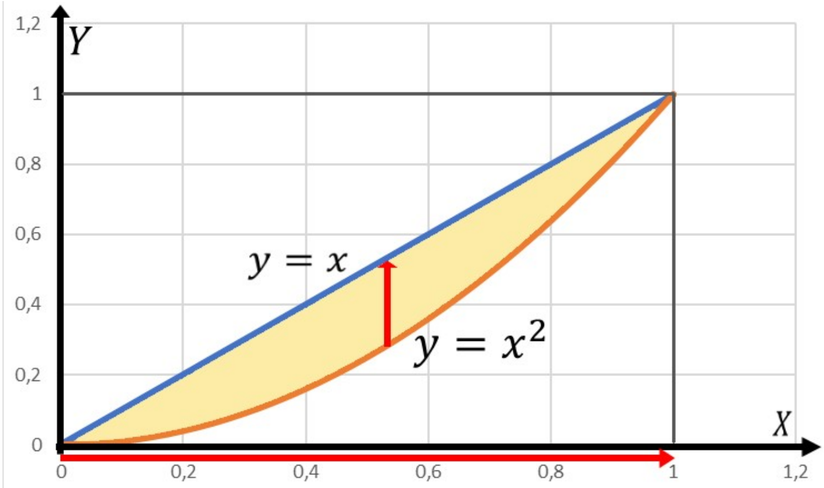


Рис. к задаче 6.

Но при $y \in [0; 1]$

$x = y \Leftrightarrow y = x$ и $x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x^2$, то есть получаем, что на нашем компакте стало:

x: от $x = 0$ до $x = 1$

y: от $y = x^2$ до $y = x$

и мы получаем, что

$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y) dy.$

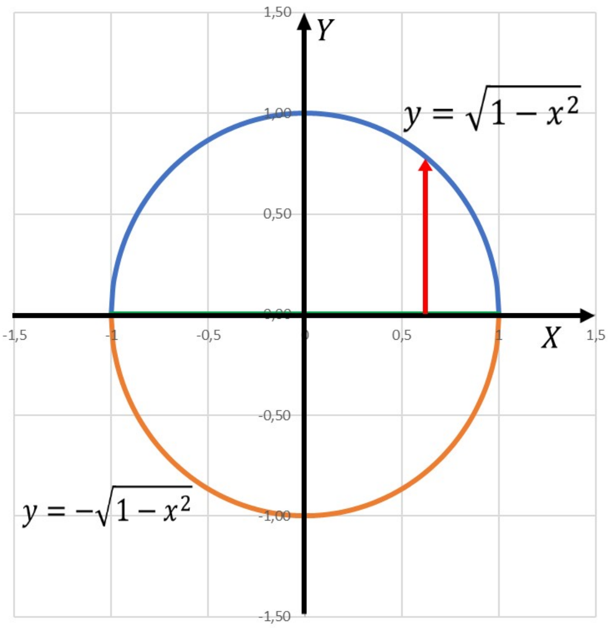
Задача 7. $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_?^? dy \int_?^? f(x, y) dx$, и опять задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: x: от $x = -1$ до $x = 1$

y: от $y = 0$ до $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Вопрос: какая кривая является графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$? Вспомните, как решались уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (школьный материал)

$$y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$



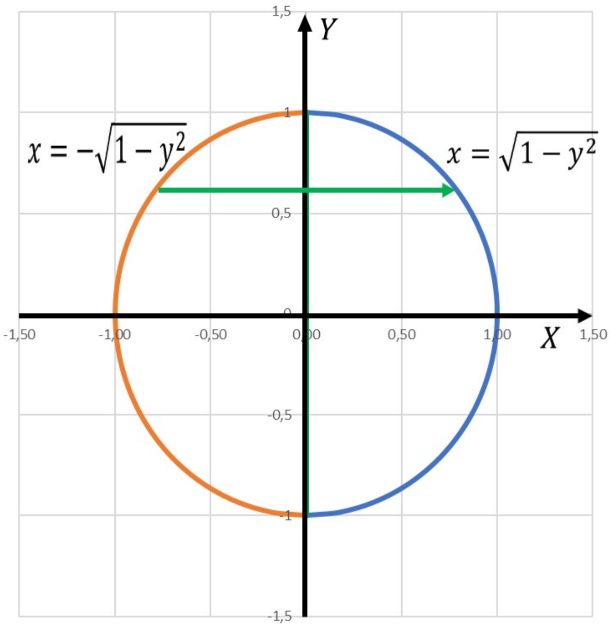


Рис. к задаче 7.

То есть графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является верхняя полуокружность окружности $x^2 + y^2 = 1$ (окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Вообще, давайте осознаем, что кривая $x^2 + y^2 = 1$ не является ни графиком функции $y = f(x)$, ни графиком функции $x = g(y)$. Но отдельные части окружности можно задать как графики функций:

Условия x: от $x = -1$ до $x = 1$

y: от $y = 0$ до $y = \sqrt{1-x^2}$

задают «верхний полукруг»

Но на этом полукруге y: от $y = 0$ до $y = 1$

x: от $x = -\sqrt{1-y^2}$ до $x = \sqrt{1-y^2}$, поэтому

$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

Задача 8. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{?}^{?} dy \int_{?}^{?} f(x,y)dx$, и опять задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: x: от $x = -2$ до $x = 2$

y: от $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$ до $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$.

Вопрос: какая кривая является графиком функции $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$?

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2=\frac{1}{2}(4-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1. \end{cases}$$

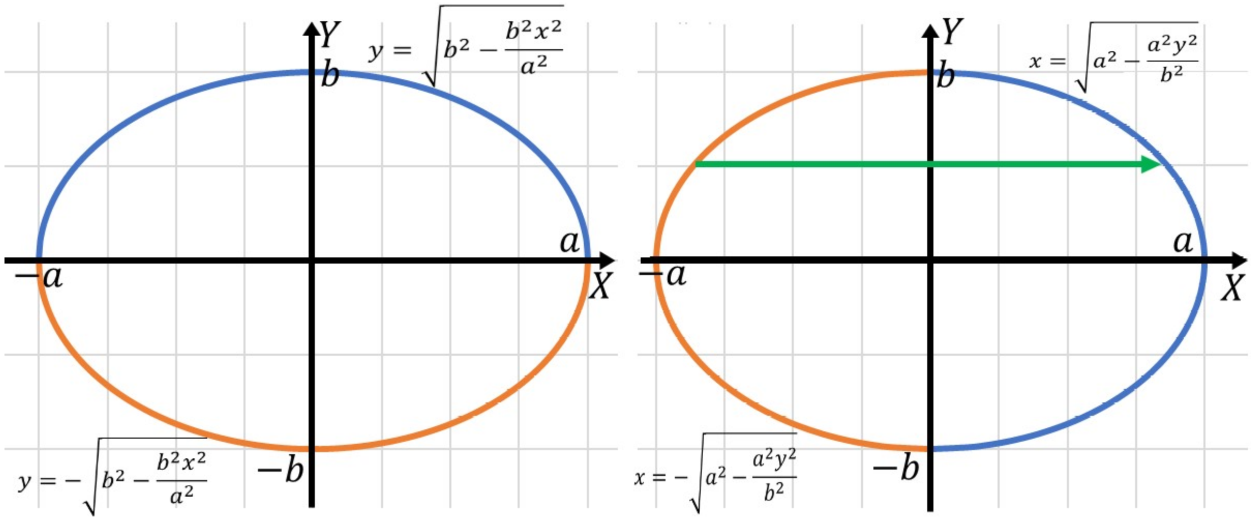


Рис. к задаче 8.

То есть графиком функции $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$ является верхняя часть эллипса $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$. Вообще, давайте осознаем, что верхняя, нижняя, левая и правая части эллипса задаются следующим образом:

В нашем случае получаем, что

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}}f(x,y)dx.$$

Задача 9. $\int_{1}^{2}dx\int_{x}^{2x}f(x,y)dy=\int_{?}^{?}dy\int_{?}^{?}f(x,y)dx$. Проблема заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: x: от $x=1$ до $x=2$

y: от $y=x$ до $y=2x$.

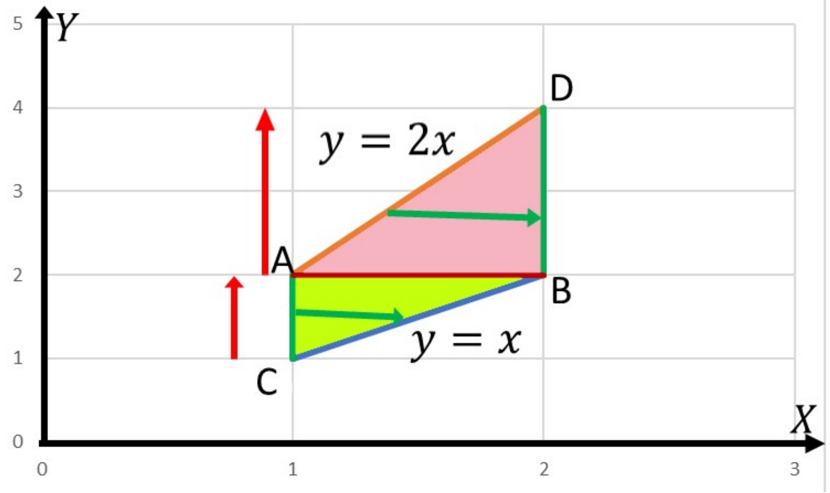


Рис. к задаче 9.

Заметим, что если мы поменяем порядок интегрирования, то компакт уже не будет криволинейной трапецией, но будет объединением двух криволинейных трапеций: треугольника ABC и треугольника ABD.

В треугольнике ABC: y: от $y = 1$ до $y = 2$

x: от $x = 1$ до $x = y$.

В треугольнике ABD: y: от $y = 2$ до $y = 4$

x: от $x = \frac{y}{2}$ до $x = 2$.

Таким образом мы получаем, что при выборе этого порядка интегрирования придется считать сумму двух интегралов (это вряд ли лучше):

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx.$$

В следующих задачах вычислить интегралы по компактам, ограниченным кривыми.

Задача 10. Вычислить $\iint_M x^3y^2dxdy$, если компакт M ограничен окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение.

Рассмотрим сначала такой порядок интегрирования:

$$\iint_M x^3y^2dxdy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x^3y^2dy = \int_{-R}^R x^3dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-R}^R x^3(y^3)\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3}\int_{-R}^R x^3\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3 = 0,$$

потому что интеграл берется по симметричному промежутку от нечетной функции (что не просто заметить!).

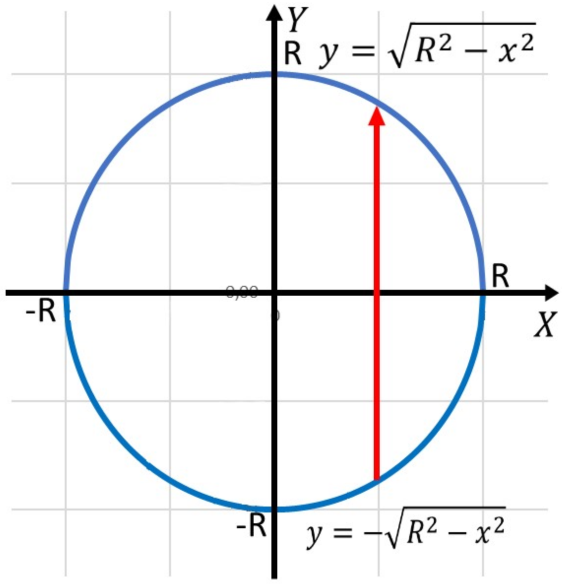


Рис. к задаче 10.

А теперь рассмотрим другой порядок интегрирования

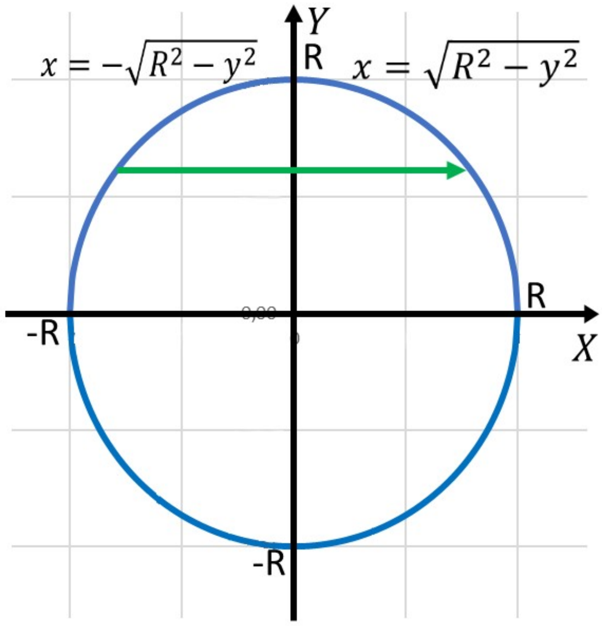


Рис. к задаче 10.

$$\iint_M x^3y^2dxdy = \int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^3y^2dx = \int_{-R}^{R} y^2dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^3dx.$$

Легко видеть, что во внутреннем интеграле при каждом y промежуток интегрирования является симметричным, а подынтегральная функция x^3 – нечетная. Поэтому внутренний интеграл равен нулю, а значит и весь интеграл равен нулю (так как полученная подынтегральная функция оказалась равной нулю).

Ответ: 0.

Эта задача показывает, что выбор порядка интегрирования важен.

Задача 11. Вычислить $\iint_M (x^2+y)dxdy$, если компакт M ограничен кривыми $y=x^2$ и $x=y^2$.

Решение.

Легко найти (решив систему), что кривые $y=x^2$ и $x=y^2$ пересекаются в точках с координатами $(0{,}0)$ и $(1{,}1)$, и соответствующая «картинка» имеет вид (см. рисунок).

При $x \in [0{,}1]$ кривая $x=y^2$ может быть задана как график функции $y=\sqrt{x}$. Поэтому получаем

$$\iint_M (x^2+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy = \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2}\right) = \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

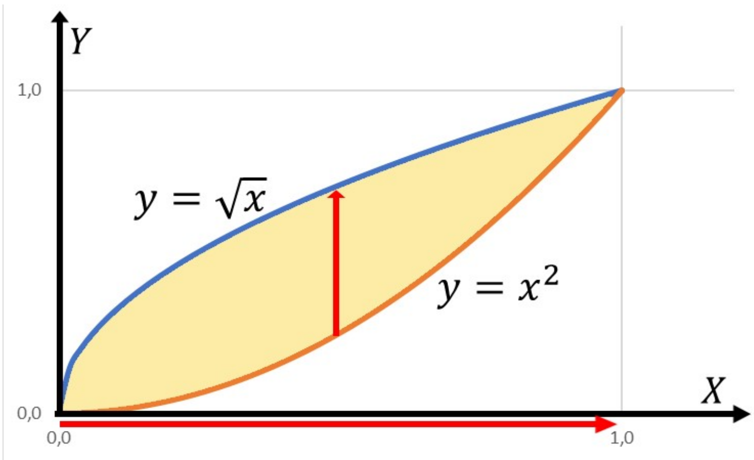


Рис. к задаче 11.

Ответ: $\frac{33}{140}$.

Задача 12. Вычислить $\iint_M \frac{x^2}{y^2} dxdy$, если компакт M ограничен кривыми $x=2,\ y=x,\ xy=1,\ x \geq 0$.

Решение.

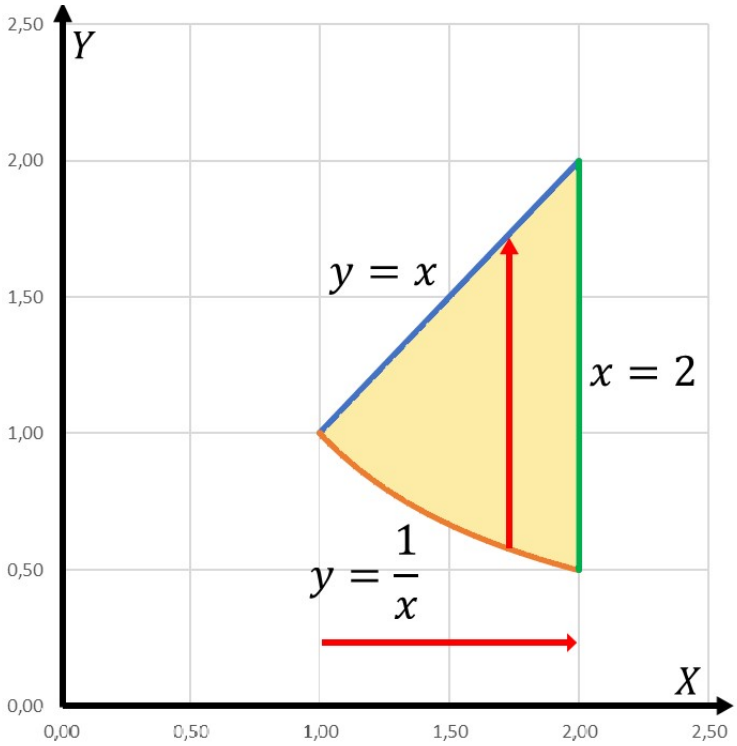


Рис. к задаче 12.

Легко найти точки пересечения кривых $y = x$ и $xy = 1$ при $x \geq 0$. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x \\ xy = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 \vee x = -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Поэтому соответствующая «картинка» будет иметь вид (см. рисунок к задаче)

Следовательно,

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} y^{-2} dy = \int_1^2 x^2 dx \left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} =$$

$$= -\int_1^2 x^2 \left(\frac{1}{x} - x\right) dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Ответ: $\frac{9}{4}$.

Задача 13. Вычислить $\iint_M \cos(x + y)\, dxdy$, если компакт M ограничен кривыми $x = 0, y = x,\ y = \pi$.

Решение.

Соответствующая «картинка» имеет следующий вид, и поэтому

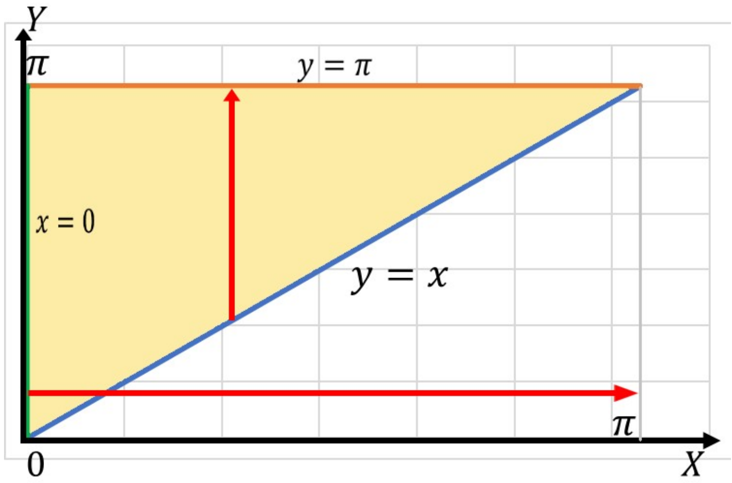


Рис. к задаче 13.

$\iint_M \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi dx \int_x^\pi \cos(x+y)\,dy =$
$= \int_0^\pi dx \int_x^\pi \cos(x+y)\,d(y+x) = \int_0^\pi dx(\sin(x+y))\big|_{y=x}^{y=\pi} =$
$= \int_0^\pi dx(\sin(x+\pi) - \sin 2x) = \int_0^\pi dx(-\sin x - \sin 2x) =$
$= -\int_0^\pi \sin x\,dx - \int_0^\pi \underbrace{\sin 2x}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\,dx = 2 - 0 = 2.$

Ответ: 2.

Замечание. При изучении неопределенных интегралов мы получили очень важное соотношение (подведение под знак дифференциала):
$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a \neq 0.$

Но при интегрировании по x для нас y является постоянной величиной! Поэтому в этом случае $dx = \frac{1}{a}d(ax+\varphi(y))$, в частности, $dx = d(x+y)$.

Задача 14. Вычислить $\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, если компакт M – четверть круга $x^2+y^2 \leq 1$, лежащая в 1-м квадранте.

Решение.
Соответствующая «картинка» имеет следующий вид.

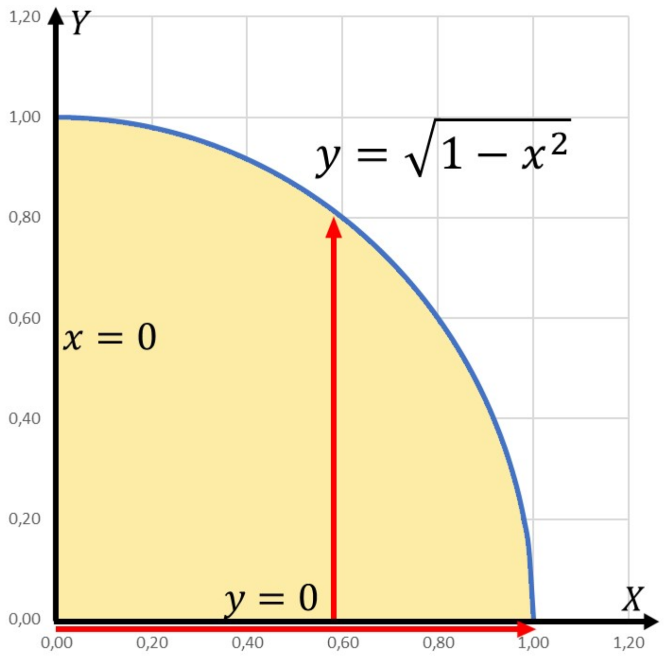


Рис. к задаче 14.

Поэтому

$$\iint_M \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}dy.$$

В дальнейшем мы пройдем замену переменной в двойном интеграле, и чтобы оценить «красоту игры», давайте попробуем сначала решить эту задачу без замены переменной. По формуле Ньютона – Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$, где $F(x)$ – произвольная первообразная.

Найдем первообразную функции $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, для чего посчитает интеграл

$$\int \sqrt{1 - x^2 - y^2}dy = \|1 - x^2 = a^2\| = \int \sqrt{a^2 - y^2}dy =$$

$$= \sqrt{a^2 - y^2} \cdot y - \int y d\sqrt{a^2 - y^2} = y\sqrt{a^2 - y^2} - \int y \frac{-2y}{2\sqrt{a^2-y^2}}dy =$$

$$= y\sqrt{a^2 - y^2} - \int \frac{-y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}dy = y\sqrt{a^2 - y^2} - \int \frac{-a^2+a^2-y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}dy =$$

$$= y\sqrt{a^2 - y^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}dy - \int \sqrt{a^2 - y^2}dy =$$

$$= y\sqrt{a^2 - y^2} + a^2 \arcsin\frac{y}{a} - \int \sqrt{a^2 - y^2}dy.$$

И мы получили уравнение относительно интеграла, решение которого выглядит так:

$$\int \sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2 - y^2} + a^2 \arcsin\frac{y}{a}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

или в наших переменных

$$\int \sqrt{1-x^2-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Но тогда

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx(0 + (1-x^2)\arcsin 1 - 0 - (1-x^2)\arcsin 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left((1-x^2)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Замечание. Мы не случайно привели это непростое решение. В дальнейшем мы будем учиться делать замену переменной в кратных интегралах, и хотелось бы, чтобы вы оценили «красоту игры», то есть поняли, как облегчает решение задачи замена переменной, а иногда задачу относительно «неберущегося интеграла» приводит к задаче относительно интеграла, который берется.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

При вычислении интегралов часто бывает полезно сделать замену переменных

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

где $x(u,v),\ y(u,v),\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v),\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v),\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v),\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$ – непрерывные функции в некоторой области $\sigma \subset \mathbb{R}^2$. Впоследствии мы будем часто писать просто $\frac{\partial x}{\partial u}$ вместо $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$ и так далее, и, кроме того, говорить при выполнении вышеупомянутых условий, что x и y – непрерывно дифференцируемые на компакте σ функции.

Пусть при этом формулы $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ задают взаимно-однозначное отображение квадрируемых областей: $M \leftrightarrow \sigma, (x,y) \in M, (u,v) \in \sigma$.

Кроме того, потребуем, чтобы всюду на области σ не равнялся нулю якобиан отображения

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Теорема. При сформулированных выше условиях для непрерывной на M функции $f(x,y)$ выполняется равенство
$\iint_M f(x,y)dxdy=\iint_\sigma f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv.$

Замечание. Утверждение теоремы сохранится, если условие взаимной однозначности отображения $x=x(u,v), y=y(u,v)$ нарушится на множестве нулевой площади.

ПЕРЕХОД В ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Пусть требуется вычислить $\iint_M f(x,y)dxdy$ по области М, которая задаётся в полярных координатах условиями
$\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\ r\le r(\varphi).\end{cases}$
Сделаем замену переменных
$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\,.\end{cases}$
При этой замене нарушается взаимная однозначность отображения. Точке (0,0) соответствует целый отрезок $[\alpha,\beta]$ на оси φ. Однако и точка, и отрезок имеют нулевую площадь, и теорема, с учётом замечания, справедлива. Осталось вычислить якобиан преобразования.
$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi\,,\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi\,,\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\,,\frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi.$
$J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$
$\Longrightarrow |J|=r$
Следовательно,
$\iint_M f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^{r(\varphi)}f(r\cos\varphi\,,r\sin\varphi)rdr.$

Полярные координаты бывают очень полезны при вычислении интегралов.

Пример 1. Найти площадь компакта M, ограниченного кривой $(a_1x+b_1y)^2+(a_2x+b_2y)^2=1$, где $\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Решение.

Отметим, что в этом случае даже сложно сразу сообразить, какую кривую задает это уравнение.

Сделаем замену переменной

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=u \\ a_2x+b_2y=v. \end{cases}$$

Нам потребуется выразить переменные x и y через u и v. Для этого надо решить исходную систему относительно x и y. Решим ее методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\delta\neq 0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} u & b_1 \\ v & b_2 \end{vmatrix}=b_2u-b_1v$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & u \\ a_2 & v \end{vmatrix}=-a_2u+a_1v.$$

Поэтому

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{1}{\delta}(b_2u-b_1v\,)$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{1}{\delta}(-a_2u+a_1v).$$

И тогда Якобиан отображения будет равен

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{b_2}{\delta} & -\frac{a_2}{\delta} \\ -\frac{b_1}{\delta} & \frac{a_1}{\delta} \end{vmatrix}=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\delta}(a_1b_2-a_2b_1)=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\delta=\frac{1}{\delta}$$

$$\Longrightarrow |J|=\frac{1}{|\delta|}.$$

Заметим, что в новых координатах (u,v) исходное уравнение

$$(a_1x+b_1y)^2+(a_2x+b_2y)^2=1$$

имеет вид $u^2+v^1=1$ и задает в системе координат Ouv окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Площадь круга M_1, ограниченного этой окружностью, равна $\pi R^2=\pi\cdot 1^2=\pi$. По теореме о среднем получаем

$$S(M)=\iint_{M(x,y)}1\cdot dxdy=\iint_{M_1(u,v)}|J(u,v)|dudv=|J(u_0,v_0)|\iint_{M_1(u,v)}dudv=$$
$$=\frac{1}{|\delta|}\cdot S(M_1)=\frac{1}{|\delta|}\cdot\pi=\frac{\pi}{|\delta|}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{|\delta|}$.

Пример 2. Найти площадь компакта M, ограниченного эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение.

Введем новые координаты

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=u\\ \frac{y}{b}=v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=au\\ y=bv\end{cases}.$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=ab\neq 0.$$

В новых координатах (u,v) уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ принимает вид $u^2+v^2=1$ и задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Площадь круга M_1, ограниченного этой окружностью равна $\pi R^2=\pi$. Поэтому получаем, что

$$S(M)=\iint_{M(x,y)}1\cdot dxdy=\iint_{M_1(u,v)}|J(u,v)|dudv=\iint_{M_1(u,v)}abdudv=$$

$$=ab\iint_{M_1(u,v)}dudv=ab\cdot S(M_1)=\pi ab.$$

Ответ: πab.

Вернемся к задаче 14.

Задача 14. Вычислить $\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, если компакт M – четверть круга $x^2+y^2\le 1$, лежащая в 1-м квадранте.

Решение.

Соответствующая «картинка» имеет следующий вид.

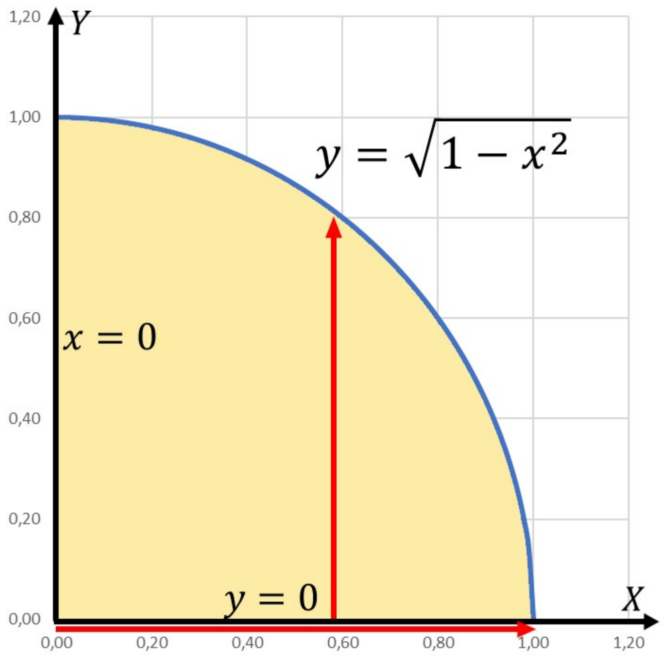


Рис. к задаче 14.

Поэтому

$\iint_M \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dy.$

Перейдем в полярные координаты. Получим

$\iint_M \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot rdr =$

$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} d(1 - r^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=1} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Сравните эти решения. Конечно, второе гораздо короче и проще в вычислениях.

Заметьте, что при решении этой задачи (и в дальнейшем) можно использовать следующую теорему.

Теорема. Если компакт M является прямоугольником $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, а функция $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ – произведением функции, зависящей только от x, и функции, зависящей только от y, то повторный интеграл является простым произведением двух римановых интегралов:

$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b dx \int_c^d (f_1(x) \cdot f_2(y)) dy =$

$= \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$

Задача 15. Вычислить $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy.$

Решение.

$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy \boxed{\equiv}$

Заметим, что интеграл $\int e^{x^2} dx$ не берется в элементарных функциях.

Пределы интегрирования задают часть круга радиуса a, лежащую в 1-м квадранте. Получаем следующую «картинку». Из «картинки» видно, что у точек этого компакта φ меняется $\varphi: 0 \to \frac{\pi}{2}$, и на каждом луче $\varphi = \varphi_0$ у точек компакта r меняется $r: 0 \to a$.

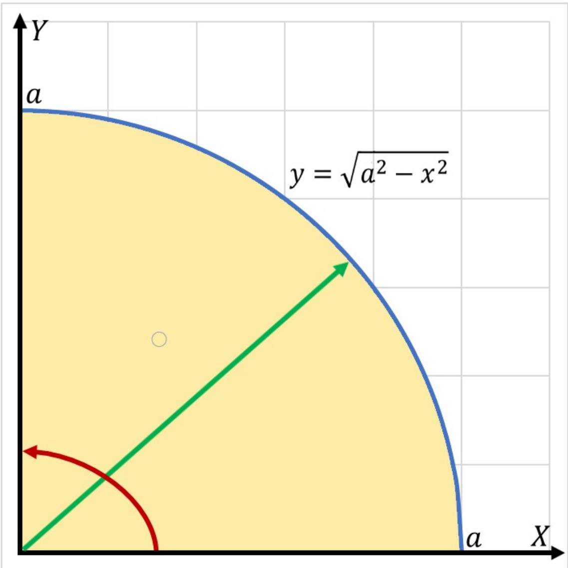


Рис. к задаче 15.

Поэтому получаем

$\boxed{\equiv} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \underbrace{r}_{|J|} dr\, e^{r^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a e^{r^2} dr^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \left(e^{a^2} - e^0\right) = \frac{\pi}{4} \left(e^{a^2} - 1\right).$

Ответ: $\frac{\pi}{4}\left(e^{a^2} - 1\right).$

Задача 16. Вычислить $\iint_M \sqrt{x^2 + y^2 - 9}\, dxdy$, где M – кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 25$.

Решение.

Нарисуем «картинку».

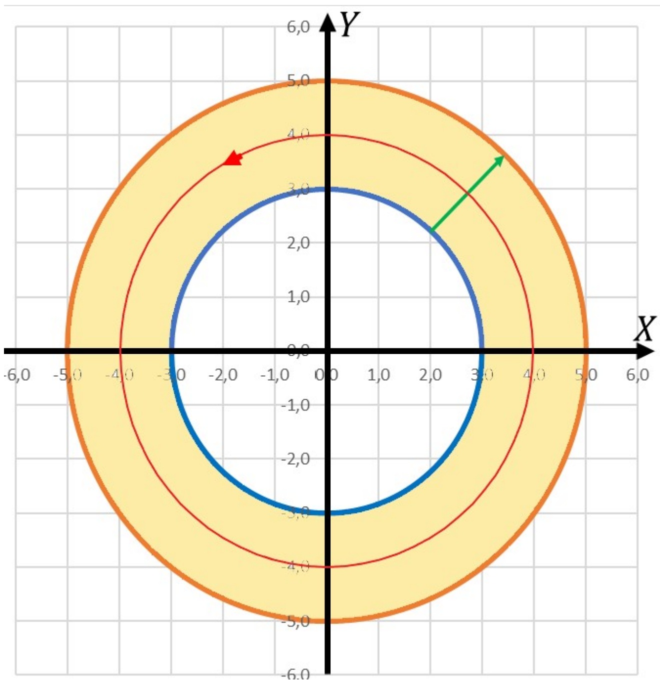


Рис. к задаче 16

Полученное множество называется «кольцом». Точки кольца есть на всех лучах $\varphi: 0 \to 2\pi$, и на каждом луче $\varphi = \varphi_0$ у точек кольца r меняется от $r = 3$ до $r = 5$. Поэтому

$$\iint_M \sqrt{x^2 + y^2 - 9}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \sqrt{r^2 - 9}\, rdr =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_3^5 \sqrt{r^2 - 9}\, d(r^2 - 9) = \pi \cdot \frac{2}{3}\left((r^2 - 9)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_3^5 = \frac{2\pi}{3}(64 - 0) = \frac{128\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{128\pi}{3}$.

Очень внимательно отнеситесь к следующей задаче.

Задача 17. Вычислить $\iint_M (x^2 + y^2)\, dxdy$, где M ограничен линией $x^2 + y^2 = ax, a > 0$.

Решение.

1) Чтобы нарисовать «картинку», в уравнении $x^2 + y^2 = ax$ выделим полные квадраты $x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ – уравнение окружности радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

2) Как определить пределы интегрирования при переходе в полярные координаты? В простых случаях они определяются легко по «картинке». В более сложных ситуациях приходится решать ***задачу «в три действия»:***
   1. В уравнение кривой вместо x и y подставляем их выражения в виде $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получаем уравнение $g(r,\varphi) = 0$.
   2. Решаем уравнение $g(r,\varphi) = 0$ как уравнение относительно переменной r, получаем корни $r_1(\varphi), r_2(\varphi), \dots r_k(\varphi)$ (которые, конечно, будут зависеть от φ). Среди этих корней выбираем пределы интегрирования по r: $r_1^*(\varphi)$ и $r_2^*(\varphi)$.
   3. Решив систему неравенств $\begin{cases} r_1^*(\varphi) \geq 0 \\ r_2^*(\varphi) \geq 0 \end{cases}$, находим пределы интегрирования по φ.

В нашей задаче:
1. $x^2 + y^2 = ax \to r^2 = ar\cos\varphi$
2. $r^2 = ar\cos\varphi \Leftrightarrow r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = a\cos\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi) \geq 0 \\ r_2(\varphi) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \geq 0 \\ a\cos\varphi \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

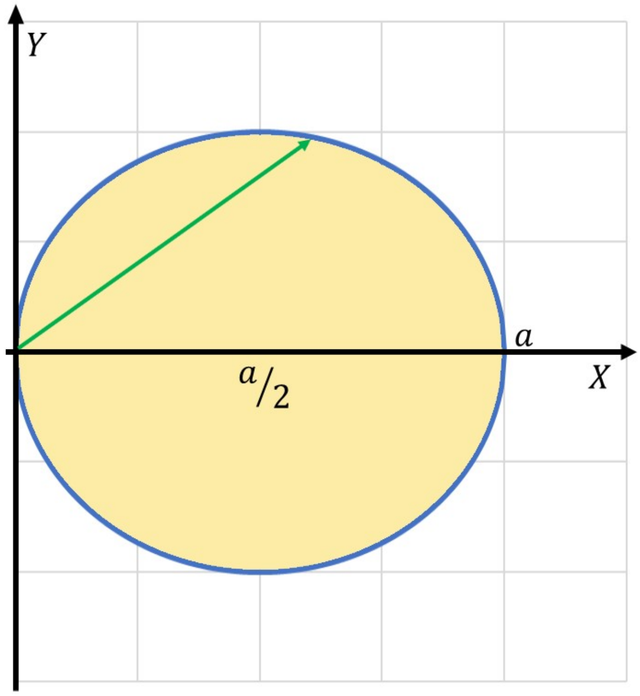


Рис. к задаче 17

Поэтому получаем, что

$$\iint_M (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(r^4\Big|_0^{a\cos\varphi}\right) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{a^4}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \underbrace{2\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}\right) d\varphi = \frac{a^4}{16}\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi = \frac{3\pi a^4}{32}.$$

Ответ: $\frac{3\pi a^4}{32}$.

Задача 18. Найти площадь компакта M, ограниченного кривыми $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $0 < a < b$ $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < p < q$.

Решение.

Нарисуем «картинку» к задаче.

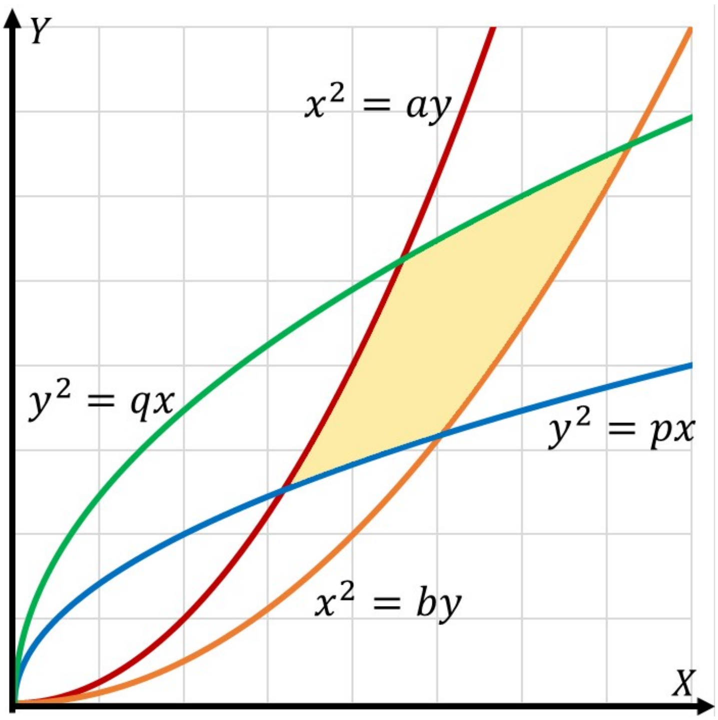


Рис. к задаче 18

Из «картинки» видно, что нам придется считать площадь желтой криволинейной фигуры (что, очевидно, будет сделать совсем не просто).

Введем новые переменные $\begin{cases} \frac{x^2}{y} = u \\ \frac{y^2}{x} = v\,. \end{cases}$

Из условия следует, что $u \in [a, b]$, $v \in [p, q]$, $(u, v) \in M_1$.

Выразим x и y через u и v:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} = u \\ \frac{y^2}{x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{u} \\ \frac{x^4}{u^2 \cdot x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{u} \\ x^3 = u^2 \cdot v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}\,. \end{cases}$$

Тогда

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\,.$$

$$\Rightarrow S(M) = \iint_M dxdy = \iint_{M_1} |J(u, v)| dudv = \int_a^b du \int_p^q \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}(b - a)(q - p).$$

Правда, здорово?!

Ответ: $\frac{1}{3}(b - a)(q - p)$.

Задача 19. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4ax + 4a^2$ и $x + y = 2a$, $a > 0$.

Решение.

Найдем точки пересечения кривых (для этого решим систему уравнений) и нарисуем «картинку».

$$\begin{cases} y^2 = 4ax + 4a^2 \\ x + y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - y \\ y^2 = 4a(2a - y) + 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - y \\ y^2 + 4ay - 12a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8a \\ y = -6a \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2a. \end{cases}$$

Уравнения кривых, которые ограничивают компакт, можно записать в виде:

$x + y = 2a \Leftrightarrow x = 2a - y$

$y^2 = 4ax + 4a^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4a} y^2 - a$.

Из «картинки» видно, что у точек компакта

координата y меняется от $-6a$ до $2a$,

и при каждом y координата x меняется от $x = \frac{1}{4a} y^2 - a$ до $x = 2a - y$.

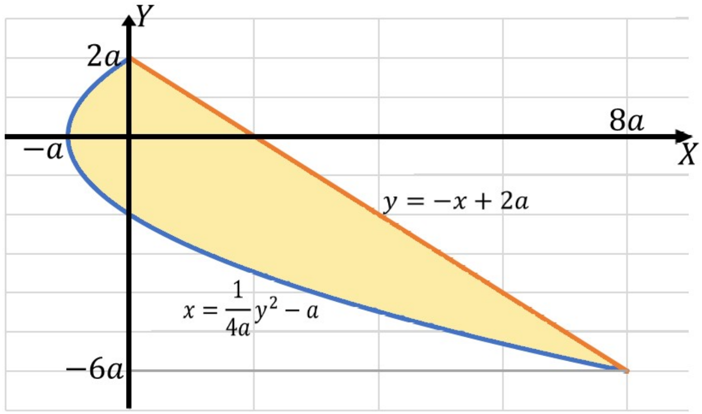


Рис. к задаче 19

Поэтому получаем

$$S(M) = \iint_M dxdy = \int_{-6a}^{2a} dy \int_{\frac{1}{4a}y^2-a}^{2a-y} dx = \int_{-6a}^{2a} \left(2a - y - \frac{1}{4a}y^2 + a\right) =$$

$$= \int_{-6a}^{2a} \left(3a - y - \frac{1}{4a}y^2\right) = \left(-\frac{y^3}{12a} - \frac{y^2}{2} + 3ay\right)\Big|_{-6a}^{2a} =$$

$$= -\frac{1}{12a}(8a^3 + 216a^3) - \frac{1}{2}(4a^2 - 36a^2) + 3a(2a + 6a) =$$

$$= -\frac{56}{3}a^2 + 16a^2 + 24a^2 = \frac{64a^2}{3}.$$

Ответ: $\frac{64a^2}{3}$.

Задача 20. Найти площадь фигуры, ограниченной в декартовой системе координат Oxy кривыми $r = a(1 - \cos\varphi)$ (кардиоида) и $r = a$ (окружность радиуса a с центром в начале координат) вне кардиоиды.

Решение.

Из «картинки» видно, что точки компакта M находятся на лучах $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и на каждом таком луче r меняется от $r = a(1 - \cos\varphi)$ до $r = a$.

Поэтому получаем

$$S(M) = \iint_M 1 \cdot dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a(1-\cos\varphi)}^{a} rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{r^2}{2}\Big|_{a(1-\cos\varphi)}^{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (a^2 - a^2(1 - \cos\varphi)^2) = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\right) d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \pi\right) = \frac{a^2}{4}(8 - \pi).$$

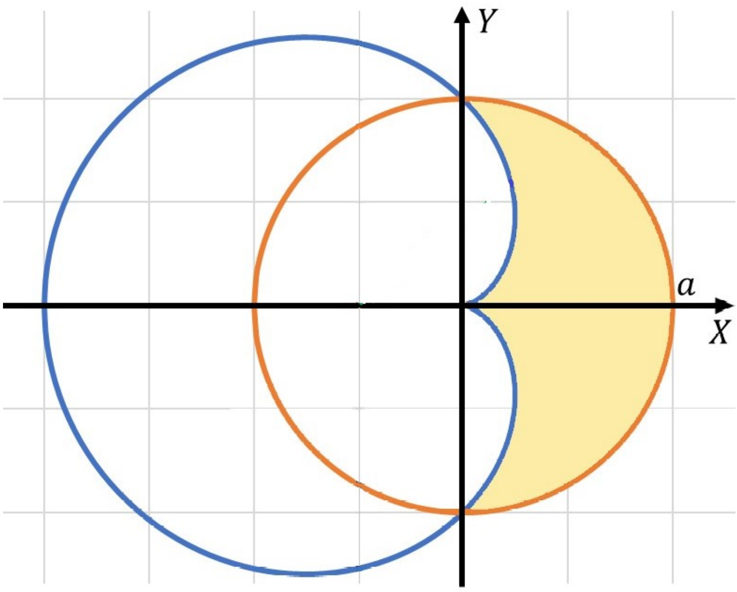


Рис. к задаче 20

Ответ: $\frac{a^2}{4}(8-\pi)$.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность S взаимно однозначно проецируется на компакт σ в плоскости Oxy, то есть может быть задана функцией двух переменных $z = z(x,y)$. И пусть $z(x,y)$, z'_x, z'_y – непрерывны на σ. Тогда ***площадь поверхности S*** можно найти так:

$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy.$$

Замечание. Нас не должно смущать то, что площадь поверхности и сама поверхность обозначены одинаково (так проще).

Замечание. Если уравнение $g(x,y) = 0$ в плоскости Oxy задает кривую L (не важно, ограниченную или нет, замкнутую или нет…), то в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнение $g(x,y) = 0$ задает цилиндр, «построенный» на этой кривой. Например, на плоскости Oxy уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ задает окружность радиуса R с центром в начале координат, а в $\mathbb{R}^3$ это же уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ задает прямой круговой цилиндр.

Задача 21. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $2z = x^2$, отсеченной плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

Решение.

Заметим, что все поверхности $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$ являются «плоскими цилиндрами», образующая которых параллельна оси Oz. Пересечение этих цилиндров также является цилиндром. На плоскости Oxy кривые ограничивают только один компакт – треугольник OAB (см. рис.)

Цилиндр $2z = x^2$ построен на кривой $2z = x^2$, лежащей в плоскости Oxz, его образующая параллельна оси Oy. То есть в $\mathbb{R}^3$ уравнение $2z = x^2$ задает «бесконечное параболическое корыто, вытянутое вдоль оси Oy». Из этого «корыта» цилиндром, построенным на треугольнике OAB (сверху – вниз) вырезается лепесток, площадь которого нам и надо найти.

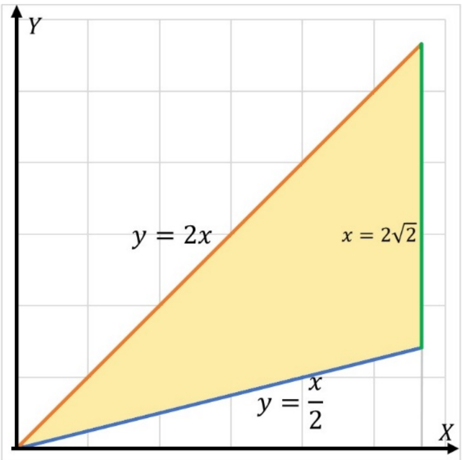


Рис. к задаче 21

$$z = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow z'_x = x,\ z'_y = 0 \Longrightarrow$$

$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy = \iint_\sigma \sqrt{1 + x^2 + 0}dxdy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sqrt{1 + x^2}dy = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx \left(2x - \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}xdx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}d(1 + x^2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(3^3 - 1) = \frac{27-1}{2} = 13.$$

Ответ: 13.

Задача 22. Вычислить площадь части поверхности конуса $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x = a,\ y = a, x, y \geq 0, a > 0$.

Решение.

Заметим, что все поверхности $x = a$, $y = a$ являются «плоскими цилиндрами», образующая которых параллельна оси Oz. Пересечение этих цилиндров также является цилиндром. На плоскости Oxy прямые $x = a$, $y = a$ и условия $x, y \geq 0, a > 0$ только один компакт – квадрат (см. рис.)

То, что уравнение $z^2 = 2xy$ задает конус, можно понять, например, сделав замену координат (поворот + растяжение) $\begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases}$.

Итак, $z^2 = 2xy$ – конус, осью симметрии которого является прямая $y = x$ в плоскости Oxy, а прямые $x = 0$ и $y = 0$ – образующими конуса.

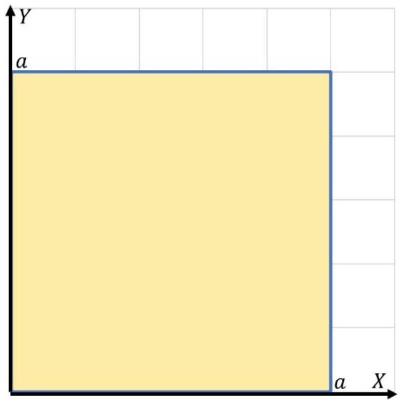


Рис. к задаче 22

Есть 2 кусочка конуса, которые проецируются на σ (лежащие выше и ниже плоскости Oxy, при этом

$z_{\text{верх}} = \sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{y},\ \ z_{\text{ниж}} = -\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{y} \Rightarrow S_{\text{общ}} = 2S_{\text{верх}}$.

$$\Rightarrow S_{\text{общ}} = 2\iint_\sigma \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy =$$

$$= 2\iint_\sigma \sqrt{1 + \left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}dxdy = 2\int_0^a dx\int_0^a \sqrt{\frac{2xy + x^2 + y^2}{2xy}}dy =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}}dy \underbrace{=}_{x,y\geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y} 2\int_0^a dx\int_0^a \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{y}}dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^a dx\int_0^a \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy = \sqrt{2}\int_0^a dx\left(2\sqrt{x}\sqrt{y} + \frac{2}{3}\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^a dx\left(2\sqrt{a}\sqrt{y} + \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{2}\left(2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4a\sqrt{a}}{3}\sqrt{x}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}$.

Замечание. Интеграл

$$\int_0^a dx\int_0^a\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy = \int_0^a dx\int_0^a\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)dy + \int_0^a dx\int_0^a\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy,$$

а это с точностью до обозначений два одинаковых интеграла, то есть, если во втором интеграле символы x и y поменять местами, то получится первый интеграл. Это означает, что сумма интегралов равна первому интегралу, умноженному на 2. А это позволяет делать гораздо меньше работы.

Задача 23. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

Уравнение $y^2 + z^2 = x^2$ задает конус, у которого осью симметрии является ось Ox. Найдем пересечение конуса с плоскостью Oxy:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \vee y = -x \\ z = 0\,. \end{cases}$$

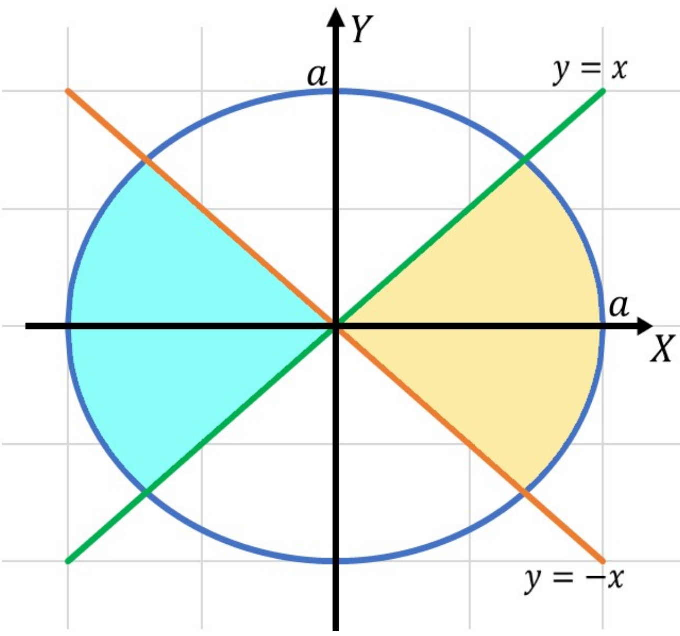


Рис. к задаче 23

Заметим, что будет 8 равных лепестков, площадь каждого равна интегралу по σ_0 (части сектора, расположенной в первом октанте)

$z^2 = x^2 - y^2 \Longrightarrow z_{\text{верх}} = z = \sqrt{x^2 - y^2}, \;\; z_{\text{ниж}} = -\sqrt{x^2 - y^2}.$

$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \;\; z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}} \Longrightarrow$

$$S = 8\iint_{\sigma_0} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2}}\,dxdy = 8\iint_{\sigma_0} \sqrt{\frac{x^2-y^2+x^2+y^2}{x^2-y^2}}\,dxdy =$$

$$= 8\iint_{\sigma_0} \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}\,dxdy = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^a \sqrt{\frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}\,rdr =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^a \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}}\,rdr = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\cos\varphi| d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} \int_0^a rdr =$$

$$= 8\sqrt{2}\,\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = 4\sqrt{2}a^2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sin^2\varphi}} =$$

$$= 4a^2 \arcsin\frac{\sin\varphi\cdot\sqrt{2}}{1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} - 0\right) = 4a^2\arcsin 1 = 4a^2\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= 2\pi a^2.$$

Ответ: $2\pi a^2$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть M – цилиндроид, ограниченный цилиндром $\varphi(x,y) = 0$, высекающим на плоскости Oxy компакт σ, ограниченный кривой $\varphi(x,y) = 0$, и поверхностями $z = z_{\text{в}}(x,y)$ (сверху) и $z = z_{\text{н}}(x,y)$ (снизу), тогда объем этого цилиндроида будет равен

$$V = \iint_\sigma \left(z_{\text{в}}(x,y) - z_{\text{н}}(x,y)\right)dxdy.$$

Задача 24. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

Решение.

Уравнения $y = \sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$ задают цилиндры в $\mathbb{R}^3$, построенные на «половинках парабол». Пересечение плоскости $x + z = 4$ с плоскостью $z = 0$ можно найти, решив систему $\begin{cases} x + z = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, то есть плоскость $x + z = 4$ пересекает плоскость $z = 0$ по прямой $x = 4$. В этом случае $z_{\text{в}}(x,y) = 4 - x$, $z_{\text{н}}(x,y) = 0$.

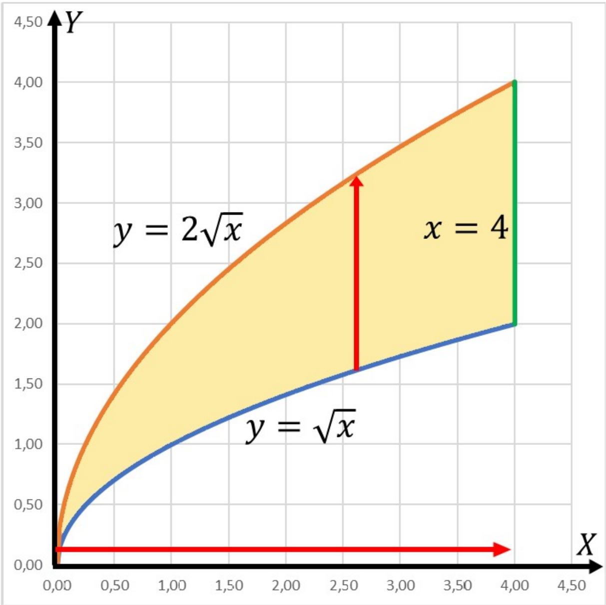


Рис. к задаче 24

Поэтому получаем, что

$$V = \iint_\sigma (z_в(x,y) - z_н(x,y))dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \big((4-x) - 0\big)dy =$$

$$= \int_0^4 (4-x)\big(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\big)dx = \int_0^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \left(4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 32 = 64\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{128}{15}.$$

Ответ: $\frac{128}{15}$.

Задача 25. Найти объем компакта, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, лежащего в 1 октанте.

Решение.

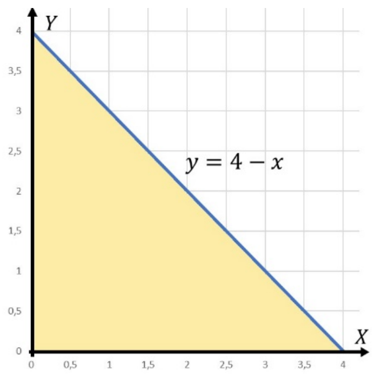


Рис. к задаче 25

Уравнение $z = x^2 + y^2$ задает эллиптический параболоид (или «чашу»). Параболоид $z = x^2 + y^2$ и плоскость $z = 0$ высекают часть пространства от плоскости до параболоида, то есть $z_в(x, y) = x^2 + y^2$, $z_н(x, y) = 0$. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ «разрезают» ее на 4 части (нам нужна та, которая в 1 октанте). Плоскость $x + y = 4$ (являющаяся «плоским цилиндром», построенным на прямой $x + y = 4$) отсекает компакт, объем которого

$$V = \iint_\sigma (z_в(x,y) - z_н(x,y))dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} \left((x^2 + y^2) - 0\right)dy =$$

$$= \int_0^4 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{4-x} = \frac{1}{3}\int_0^4 (3x^2(4-x) + (4-x)^3)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^4 (12x^2 - 3x^3 + 64 - 48x + 12x^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^4 (64 - 48x + 24x^2 - 4x^3)dx = \frac{4}{3}\int_0^4 (16 - 12x + 6x^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\left(16x - 6x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4 = \frac{4}{3}(64 - 96 + 128 - 64) = \frac{4}{3}\cdot 32 = \frac{128}{3}.$$

Ответ: $\frac{128}{3}$.

Задача 26. Найти объем части шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, вне цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

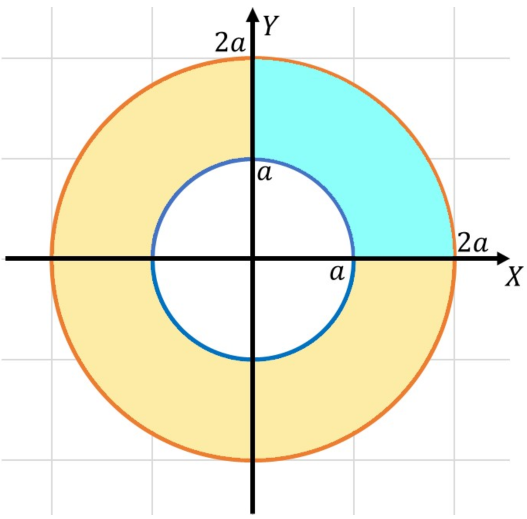


Рис. к задаче 26

Задачу можно сформулировать так: «из яблока с помощью круглого цилиндра вырезали сердцевину; какой объем яблока остался?»

Проекция оставшейся части шара на плоскость Oxy представляется собой множество точек σ, ограниченных двумя окружностями $x^2 + y^2 = 4a^2$ и

$x^2 + y^2 = a^2$ (кольцо). Весь объем состоит из восьми равных по объему кусочков. Посчитаем объем кусочка в первом октанте и умножим его на 8, получим

$$V = 8\iint_{\sigma_0}(z_{\text{в}}(x,y) - z_{\text{н}}(x,y))dxdy = 8\iint_{\sigma_0}\left(\left(\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\right) - 0\right)dxdy =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{2a} \sqrt{4a^2 - r^2}rdr = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\int_a^{2a} \sqrt{4a^2 - r^2}d(4a^2 - r^2) =$$

$$= -2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot (4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{2a} = -\frac{4\pi}{3}\left(0 - (3a^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4\pi}{3}3\sqrt{3}a^3 = 4\pi\sqrt{3}a^3.$$

Ответ: $4\pi\sqrt{3}a^3$.

Замечание. Обратите внимание, что если компакт M симметричен относительно координатных осей, то не всегда можно при вычислениях интегралов считать интеграл в первом квадранте и умножать его на 4. Чтобы это было возможно, нужно чтобы подынтегральная функция также была четна по переменным.