

Элементы векторного анализа-2

Дивергенция и ротор. Векторные формулировки основных теорем.

Дадим важное определение векторного анализа.

Определение 1. Пусть $\vec{F}$ – векторное поле на множестве D , а S – ориентированная кусочно-гладкая поверхность в D с нормалью $\vec{n}$. Тогда интеграл

$$\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS$$

называется **поток** поля $\vec{F}$ через поверхность S в заданном направлении.

Само название связано со следующей гидродинамической задачей: рассматривается поле скоростей $\vec{v}$ частиц жидкости, текущей в некотором объёме, и мы хотим найти количество жидкости, которая пройдёт через поверхность S в сторону нормали за малый промежуток времени dt . Рассмотрим малую часть S с площадью dS . Через эту часть протечёт количество жидкости, заполняющее цилиндр объёмом $(\vec{v}, \vec{n}) dt dS$ (см. рисунок) .

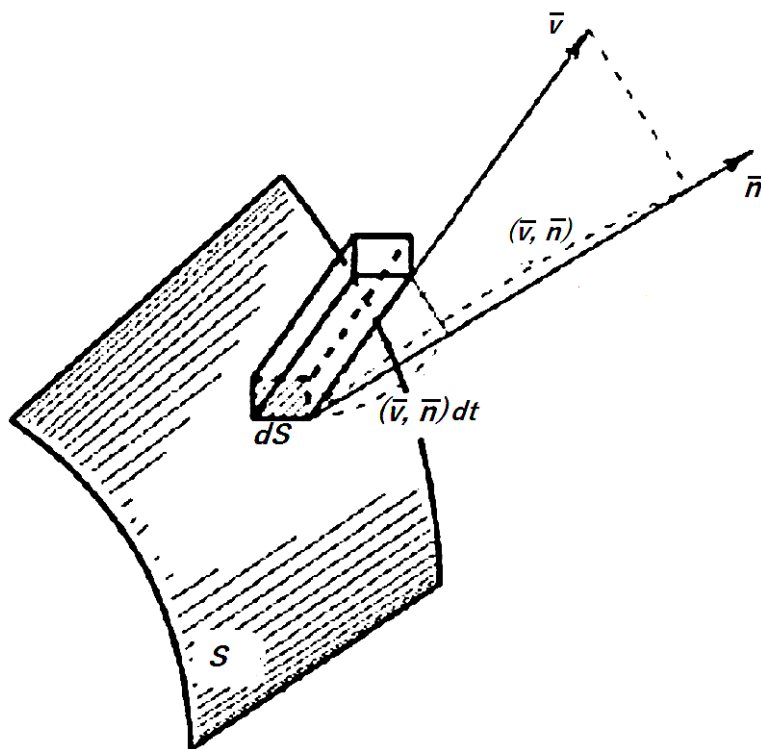


Рис. 1: Цилиндр заполнится жидкостью за время dt .

Тогда через всю поверхность пройдёт объём жидкости, равный $dt \iint_S (\vec{v}, \vec{n}) dS$, то есть поток – это мгновенная скорость изменения объёма жидкости, протекающей через поверхность S .

Найти поток векторного поля через заданную поверхность можно, вычисляя поверхностный интеграл второго рода, поэтому будут полезны теоремы, с помощью которых вычисляются такие интегралы. Отдельно остановимся на случае, когда дана поверхность S , ограничивающая тело V , а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S . Напомним, что S – кусочно-гладкая

поверхность, а поле $\bar{F}$ гладкое на множестве D , в котором содержатся поверхность S и тело V . Тогда поток можно найти с помощью формулы Гаусса – Остроградского:

$$\iint_S (\bar{F}, \bar{n}) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

В векторном анализе важную роль играет выражение под знаком тройного интеграла в правой части.

Определение 2. Пусть $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ является гладким полем на множестве D . **Дивергенцией** называется скалярное поле на множестве D , задаваемое формулой

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вспоминая вектор из частных производных $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ и то, как устроено скалярное произведение в координатах, можем использовать ещё одно обозначение для дивергенции: $\operatorname{div} \bar{F} = (\nabla, \bar{F})$.

Недостаток определения дивергенции в том, что оно зависит от введённой системы координат. Дадим определение, не зависящее от системы координат, с помощью которого заодно и проясним смысл понятия дивергенции. Для этого нам потребуется записать формулу Гаусса – Остроградского в векторной форме.

Теорема 1. Формула Гаусса – Остроградского в векторной форме. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано гладкое поле $\bar{F} = \{P, Q, R\}$, а кусочно-гладкая поверхность S ограничивает тело V в пространстве, причём $S \cup V \subset \mathbb{R}^3$. Пусть нормаль $\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ направлена во внешнюю сторону от тела V . Тогда справедлива **формула Гаусса-Остроградского**:

$$\iint_S (\bar{F}, \bar{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz.$$

Пусть S – это сфера радиуса ε с центром в точке M_0 . Так как $\operatorname{div} \bar{F}$ является непрерывной функцией, то к тройному интегралу в правой части можно применить теорему о среднем, согласно которой внутри сферы S найдётся такая точка M_1 , что

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = \frac{4\pi\varepsilon^3}{3} \operatorname{div} \bar{F}(M_1).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$ имеем $M_1 \rightarrow M_0$, поэтому, используя непрерывность дивергенции, получаем равенство

$$\operatorname{div} \bar{F}(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\iint_S (\bar{F}, \bar{n}) dS}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}}.$$

Этот предел и можно взять в качестве определения дивергенции векторного поля $\bar{F}$ в точке M_0 . Так дивергенцию можно определить в любой точке множества D , на котором задано поле $\bar{F}$.

Это определение означает, что дивергенцию можно понимать как поток через бесконечно малую сферу с центром в данной точке, что позволяет придать наглядный смысл понятию дивергенции. Дальнейшие объяснения не претендуют на строгость, а лишь проясняют суть. Если, например, рассматривается поле течения жидкостей, то дивергенция

позволяет ответить на вопрос о том, находится ли в точке M_0 (точнее, в бесконечно малой окрестности этой точки) источник жидкости, выделяющий её (если $\operatorname{div} \bar{F}(M_0) > 0$), либо приёмник, поглощающий жидкость (если $\operatorname{div} \bar{F}(M_0) < 0$). Если $\operatorname{div} \bar{F}(M_0) = 0$, то либо источник и приёмник жидкости в бесконечно малой окрестности точки M_0 отсутствуют, либо взаимно компенсируют количество выделяемой и поглощаемой жидкости. Конечно, если, например, $\operatorname{div} \bar{F}(M_0) > 0$, то это может означать наличие и приёмника, и источника, но выделение жидкости просто происходит интенсивнее, чем поглощение. При этом, хотя объяснения на примере с жидкостью и не являются строгими, но они формируют правильную интуицию, необходимую при работе с понятием дивергенции. Отметим ещё, что само название “дивергенция” происходит от латинского слова “divergere”, что означает “расхождение” или “расходимость”.

Приведём некоторые иллюстрации, с помощью которых можно ещё лучше понять смысл дивергенции, причём ограничимся векторным полем на плоскости.

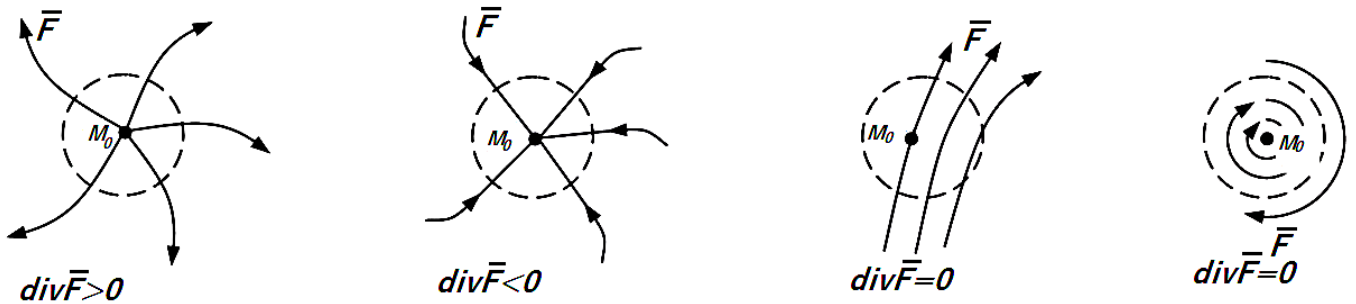


Рис. 2: Поведение векторного поля и знаки дивергенции.

Запишем свойства дивергенции. Так как дивергенция представляет собой скалярное поле, построенное по векторному полю, а для векторов основные операции – это взятие их линейной комбинации и умножение вектора на число, то мы рассмотрим два свойства дивергенции.

Предложение 1. *Предположим, что U – гладкое скалярное поле на множестве $D \subset \mathbb{R}^3$, а $\bar{F}_1 = \{P_1, Q_1, R_1\}$ и $\bar{F}_2 = \{P_2, Q_2, R_2\}$ – два гладких векторных поля на D . Тогда:*

- 1) *при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\operatorname{div}(\alpha \bar{F}_1 + \beta \bar{F}_2) = \alpha \operatorname{div} \bar{F}_1 + \beta \operatorname{div} \bar{F}_2$;*
- 2) *$\operatorname{div}(U \bar{F}_1) = (\nabla U, \bar{F}_1) + U \operatorname{div} \bar{F}_1$.*

Доказательство. Первое свойство очевидно, а на втором остановимся подробнее. Имеем, используя формулу для производной произведения:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U \bar{F}_1) &= \frac{\partial(U P_1)}{\partial x} + \frac{\partial(U Q_1)}{\partial y} + \frac{\partial(U R_1)}{\partial z} = U \frac{\partial P_1}{\partial x} + P_1 \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial Q_1}{\partial y} + Q_1 \frac{\partial U}{\partial y} + U \frac{\partial R_1}{\partial z} + R_1 \frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \right) + P_1 \frac{\partial U}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial U}{\partial y} + R_1 \frac{\partial U}{\partial z} = U \operatorname{div} \bar{F}_1 + (\nabla U, \bar{F}_1). \end{aligned}$$

□

Остановимся чуть подробнее на переформулировке теоремы Гаусса – Остроградского. Её удобно применять при вычислении потока, даже если поверхность не ограничивает тело.

Пример 1. *Найдём поток векторного поля*

$$\bar{F} = \{x^3, y^3, z^3\}$$

через полную поверхность S конуса

$$V = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2 + y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{H^2}, 0 \leq z \leq H \right\}.$$

По формуле Гаусса – Остроградского получим тройной интеграл, в котором затем сделаем цилиндрическую замену координат:

$$\begin{aligned} \iint_S (\bar{F}, \bar{n}) dS &= \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \int_{\frac{H\sqrt{x^2+y^2}}{R}}^H (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\frac{Hr}{R}}^H (r^2 + h^2) dh = 6\pi \int_0^R \left(r^3 \left(H - \frac{Hr}{R} \right) + \frac{r}{3} \left(H^3 - \frac{H^3 r^3}{R^3} \right) \right) dr = \\ &= 2\pi \int_0^R \left(3Hr^3 - r^4 \left(\frac{3Hr}{R} - \frac{H^3}{R^3} \right) + rH^3 \right) dr = \frac{3\pi}{10} R^2 H (R^2 + 2H^2). \end{aligned}$$

Теперь вычислим поток этого же поля через боковую поверхность конуса S_2 .

СПОСОБ ПЕРВЫЙ. Выше мы нашли поток через полную поверхность, причём рассматривалась внешняя нормаль. Для нахождения потока через боковую поверхность в силу аддитивности поверхностного интеграла второго рода нам нужно вычесть из полученного выше потока через полную поверхность поток через верхнюю границу конуса, то есть через круг $S_1 = \{(x, y, H) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Так как круг S_1 лежит в плоскости $z = H$, то нормаль к поверхности S_1 – это вектор $\bar{n}_1 = \{0, 0, 1\}$. По теореме о связи между поверхностными и двойными интегралами имеем

$$\iint_{S_1} (\bar{F}, \bar{n}_1) dS = \iint_{S_1} z^3 dS = H^3 \iint_{x^2+y^2 < R^2} dx dy = \pi R^2 H^3,$$

где в последнем равенстве мы воспользовались формулой для площади круга, которая и равна последнему двойному интегралу. Таким образом, поток через боковую поверхность равен

$$\frac{3\pi}{10} R^2 H (R^2 + 2H^2) - \pi R^2 H^3 = \frac{\pi}{10} (3R^2 - 4H^2) H R^2.$$

СПОСОБ ВТОРОЙ. Можно, однако, вычислить поток через боковую поверхность в сторону внешней нормали и непосредственно. Для этого, прежде всего, найдём вектор $\bar{n}_2$ внешней нормали. Так как $z \geq 0$, то угол между нормалью и положительным направлением оси Oz (то есть вектором $\bar{n}_1$) тупой (см. рисунок).

Явное уравнение боковой поверхности конуса имеет вид $z = \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому касательная плоскость к конусу в точке $K_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{Hx_0}{R\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(x - x_0) + \frac{Hy_0}{R\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

а тогда вектор нормали в этой точке имеет координаты $\frac{Hx_0}{R\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$, $\frac{Hy_0}{R\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ и -1 . Так как точка выбрана произвольно, то можем просто считать, что координаты вектора нормали равны $\frac{Hx}{R\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{Hy}{R\sqrt{x^2 + y^2}}$ и -1 . Тогда длина этого вектора равна

$$\sqrt{\frac{H^2(x^2 + y^2)}{R^2(x^2 + y^2)} + 1} = \frac{\sqrt{H^2 + R^2}}{R}.$$

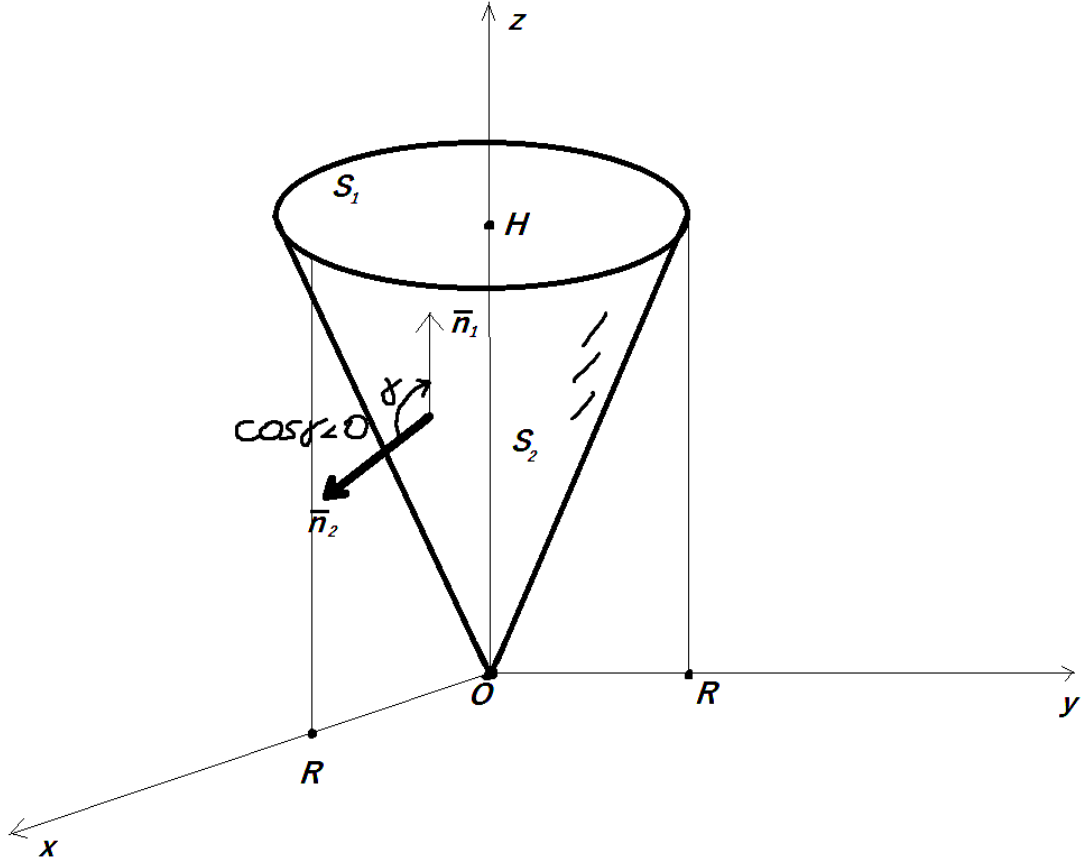


Рис. 3: Нормаль направлена во внешнюю сторону.

Учитывая, что $\cos \gamma < 0$, получаем

$$\bar{n}_2 = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}} \left\{ \frac{Hx}{R\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Hy}{R\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right\}.$$

Таким образом, имеем для потока, используя полярную замену, равенство

$$\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \frac{\sqrt{H^2 + R^2}}{R}$$

и теорему о переходе от поверхностного интеграла первого рода к двойному:

$$\begin{aligned} \iint_S (\bar{F}, \bar{n}_2) dS &= \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}} \iint_{x^2 + y^2 < R^2} \left(\frac{H(x^4 + y^4)}{R\sqrt{x^2 + y^2}} - z^3 \right) \frac{\sqrt{H^2 + R^2}}{R} dx dy = \\ &= \iint_{x^2 + y^2 < R^2} \left(\frac{H(x^4 + y^4)}{R\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{H^3}{R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\frac{H}{R} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - \frac{H^3}{R^3} \right) r^4 dr = 4 \frac{HR^4}{5} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) d\varphi - 2\pi \frac{H^3 R^2}{5} = \\ &= 4 \frac{HR^4}{5} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} - 2\pi \frac{H^3 R^2}{5} = \frac{\pi}{10} (3R^2 - 4H^2) HR^2. \end{aligned}$$

Здесь мы также использовали то, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Конечно, второй способ выглядит более громоздко, чем первый, но он тоже важен, так как иногда добавить границу так, чтобы получилась удобная для вычислений поверхность, ограничивающая тело, невозможно, а прямой способ подсчёта поверхностного интеграла приводит к ответу.

Теперь определим ещё одно важное понятие теории поля – ротор. Здесь возникнет та же ситуация, что и с дивергенцией, то есть определение будет дано в координатах, после чего мы (на этот раз с помощью формулы Стокса), получим определение, не зависящее от координат, а уже с помощью этого определения нам будет проще понять физический смысл ротора.

Определение 3. Пусть $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ – гладкое векторное поле в области D . Векторное поле

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

называется **ротором** (или **вихрем**) векторного поля $\vec{F}$ и обозначается $\text{rot} \vec{F}$.

Определитель представляет собой векторное произведение ∇ и $\vec{F}$, так что ротор обозначают ещё $[\nabla, \vec{F}]$.

Чтобы объяснить смысл понятия ротора, нам потребуется сформулировать теорему Стокса в терминах векторного анализа, а для этого мы должны ввести ещё одно определение.

Отметим, что криволинейный интеграл

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

представляет собой работу силы $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ при перемещении точки ориентированной кривой L . Это и позволяет ввести следующее определение.

Определение 4. Пусть $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ – гладкое векторное поле в области D . Криволинейный интеграл

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

называют **работой поля** $\vec{F}$ вдоль ориентированной кривой $L \subset D$. Если кривая L является контуром, то этот интеграл называется **циркуляцией** $\vec{F}$ вдоль контура L .

Сформулируем теорему Стокса, используя определение циркуляции.

Теорема 2. Формула Стокса. Пусть $\vec{F}$ – гладкое векторное поле в области $D \subset \mathbb{R}^3$, а $S \subset D$ – гладкая двусторонняя поверхность, на которой выбрано направление нормали $\vec{n}$, и L – кусочно-гладкий контур, являющийся границей S , причём L ориентирован положительно. Тогда циркуляция вектора $\vec{F}$ вдоль контура L равна потоку ротора $\vec{F}$ через поверхность S в сторону $\vec{n}$:

$$\oint_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S (\text{rot} \vec{F}, \vec{n}) dS.$$

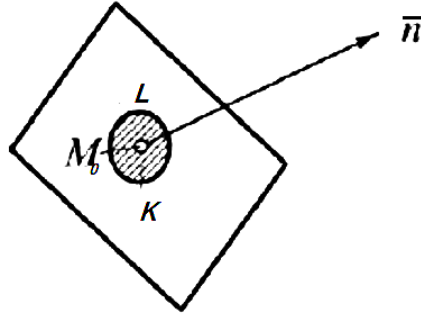


Рис. 4: Круг – это поверхность в плоскости Π .

Зафиксируем $M_0 \in D$, рассмотрим плоскость Π , содержащую эту точку и круг C в плоскости Π с центром в M_0 радиуса ε . Пусть L – окружность, являющаяся границей этого круга. Пусть $\bar{n}$ – нормаль к плоскости Π , ориентации поверхности C с нормалью $\bar{n}$ и границы L согласованы (см. рисунок).

Для поверхностных интегралов справедлива теорема о среднем, то есть на круге найдётся такая точка M_1 , что

$$\iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}, \bar{n}) dS = (\operatorname{rot} \bar{F}(M_1), \bar{n}) \pi \varepsilon^2.$$

Здесь $\operatorname{rot} \bar{F}(M_1)$ означает, что ротор берётся в точке M_1 .

Таким образом, в силу формулы Стокса имеем:

$$\oint_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}, \bar{n}) dS = (\operatorname{rot} \bar{F}(M_1), \bar{n}) \pi \varepsilon^2,$$

откуда, в силу того, что $(\operatorname{rot} \bar{F}(M_1), \bar{n}) \rightarrow (\operatorname{rot} \bar{F}(M_0), \bar{n})$ при $M_1 \rightarrow M_0$, а $M_1 \rightarrow M_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, вытекает, что

$$(\operatorname{rot} \bar{F}(M_0), \bar{n}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\oint_L (Pdx + Qdy + Rdz)}{\pi \varepsilon^2}.$$

Плоскость через точку M_0 проводится произвольно, поэтому предел в правой части определяет скалярное произведение ротора и произвольного вектора, являющегося нормалью к плоскости, чем определяется и сам ротор. Такое определение ротора уже не зависит от системы координат.

Из определения ротора через предел видно, что он связан с циркуляцией вдоль бесконечно малой окружности с центром в точке, в которой вычисляется ротор. На самом деле вектор ротора пропорционален вектору мгновенной угловой скорости бесконечно малой части пространства с центром в точке M_0 . Поясним это на следующем примере.

Пример 2. Пусть D – твёрдое тело, совершающее движение в $\mathbb{R}^3$, и фиксирован некоторый момент времени. В этот момент времени каждая точка тела имеет свою мгновенную скорость, то есть каждой точке тела поставлен в соответствие её вектор мгновенной скорости. Таким образом, если тело D рассматривать как множество его точек, то получим векторное поле $\bar{v}$ мгновенных скоростей, координаты которого обозначим v_x , v_y и v_z . Выберем точку O тела (или, что для нас равносильно, множества)

D и примем её за начало ортонормированной системы координат. Тогда, как известно из кинематики, справедливо следующее равенство:

$$\bar{v} = \bar{v}(O) + [\bar{\omega}, \bar{r}],$$

где $\bar{v}(O) = \{v_x(O), v_y(O), v_z(O)\}$ – это скорость точки O , $\bar{\omega}$ – мгновенная угловая скорость тела в точке O , а $\bar{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор, соединяющий O с некоторой точкой M тела. Если $\bar{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$, то

$$[\bar{\omega}, \bar{r}] = \{\omega_y z - \omega_z y, \omega_z x - \omega_x z, \omega_x y - \omega_y x\}.$$

Таким образом, для координат векторного поля $\bar{v}$ имеем следующие равенства:

$$v_x = v_x(O) + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = v_y(O) + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = v_z(O) + \omega_x y - \omega_y x.$$

Отметим, что так как момент времени фиксирован, то координаты вектора скорости точки O и координаты вектора угловой скорости постоянны, поэтому для $\text{rot} \bar{v}$ имеем

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z.$$

Таким образом, $\text{rot} \bar{v} = 2\bar{\omega}$.

Итак, ротор в случае поля мгновенных скоростей пропорционален угловой скорости тела, откуда виден смысл этого понятия и смысл названия (напомним, что ротор мы также называем вихрем).

Перечислим теперь некоторые свойства ротора.

Предложение 2. Предположим, что U – гладкое скалярное поле на множестве $D \subset \mathbb{R}^3$, а $\bar{F}_1 = \{P_1, Q_1, R_1\}$ и $\bar{F}_2 = \{P_2, Q_2, R_2\}$ – два гладких векторных поля на D . Тогда:

- 1) при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\text{rot}(\alpha \bar{F}_1 + \beta \bar{F}_2) = \alpha \text{rot} \bar{F}_1 + \beta \text{rot} \bar{F}_2$;
- 2) $\text{rot}(U \bar{F}_1) = [\nabla U, \bar{F}_1] + U \text{rot} \bar{F}_1$;
- 3) если поле U дважды непрерывно дифференцируемо, $\text{rot}(\nabla U) = 0$;
- 4) если поле $\bar{F}_1$ дважды гладкое, то $\text{div}(\text{rot} \bar{F}_1) = 0$.

Доказательство. Первое свойство очевидно. Докажем второе свойство:

$$\begin{aligned} \text{rot}(U \bar{F}_1) &= \left\{ \frac{\partial(U R_1)}{\partial y} - \frac{\partial(U Q_1)}{\partial z}, \frac{\partial(U P_1)}{\partial z} - \frac{\partial(U R_1)}{\partial x}, \frac{\partial(U Q_1)}{\partial x} - \frac{\partial(U P_1)}{\partial y} \right\} = \\ &= U \left\{ \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}, \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}, \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right\} + \\ &+ \left\{ R_1 \frac{\partial U}{\partial y} - Q_1 \frac{\partial U}{\partial z}, P_1 \frac{\partial U}{\partial z} - R_1 \frac{\partial U}{\partial x}, Q_1 \frac{\partial U}{\partial x} - P_1 \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = \\ &= U \text{rot} \bar{F}_1 + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} = U \text{rot} \bar{F}_1 + [\nabla U, \bar{F}_1]. \end{aligned}$$

Докажем третье свойство. Действительно, в силу того, что поле U дважды непрерывно дифференцируемо, смешанные производные равны, откуда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0.$$

Равенство остальных компонент ротора от градиента нулю доказывается аналогично.

Наконец, докажем четвёртое свойство:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{F}_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial y \partial x} = 0.\end{aligned}$$

□

Потенциальное и соленоидальное векторные поля

Рассмотрим два специальных вида векторных полей. Важность именно таких видов полей будет объяснена в конце раздела.

Определение 5. Векторное поле $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ на множестве D называется **потенциальным**, если существует такая скалярная величина U , что $\bar{F} = \nabla U$, то есть

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

на D . Функция U называется **потенциалом** векторного поля $\bar{F}$.

Таким образом, векторное поле потенциально, если оно является полем градиентов некоторого скалярного поля. Если поле потенциально в области D , то работа этого поля не зависит от кривой L , а зависит только от начала и конца этой кривой, так как выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является в этом случае дифференциалом dU потенциала U поля $\bar{F}$. Очевидно также, что циркуляция потенциального поля $\bar{F}$ равна нулю. В силу третьего свойства ротора мы можем сделать вывод, что *если поле $\bar{F}$ потенциально, то $\operatorname{rot}\bar{F} = \bar{0}$* . Это позволяет дать потенциальному полю ещё название “безвихревое”. Обратное верно, но локально, то есть если мы знаем, что ротор векторного поля равен нулю, то в некоторой достаточно малой части множества D такое поле является потенциальным, но в разных частях D потенциал у этого поля может быть разным. Например, в разных частях множества D векторное поле $\bar{F}$ может представлять собой суммы разных градиентов. Тогда на всём множестве D его нельзя назвать потенциальным, так как нет единого потенциала, но локально поле $\bar{F}$ является потенциальным. Если накладывать на множество D и поле $\bar{F}$ дополнительные ограничения, то можно установить условия, при которых потенциальным будет поле $\bar{F}$ на множестве D , если у него нулевой ротор.

Теперь дадим определение ещё одного поля специального вида, после чего обсудим его свойства.

Определение 6. Векторное поле $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ на множестве D называется **соленоидальным**, если существует такое векторное поле $\bar{A} = \{X, Y, Z\}$, что $\bar{F} = \operatorname{rot}\bar{A}$, то есть

$$P = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad Q = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

на D . Векторное поле $\bar{A}$ называется **векторным потенциалом** векторного поля $\bar{F}$.

Так как дивергенция ротора равна нулю согласно свойству 4 ротора, то для любого соленоидального поля $\bar{F}$ дивергенция равна нулю. Отсюда происходит ещё одно название соленоидального – **бездивергентное**. Верно ли, что если дивергенция поля равна нулю,

то оно соленоидальное? Верно только локально, то есть ситуация та же, что для потенциального поля. Можно доказать, что если дивергенция поля равна нулю, то локально вектора поля являются ротором другого поля, но в разных частях множества D , на котором определено поле, ротор может быть различным. Если накладывать на множество D и поле $\vec{F}$ дополнительные ограничения, то можно установить условия, при которых соленоидальным будет поле $\vec{F}$ на множестве D , если у него нулевая дивергенция.

Из теоремы Гаусса – Остроградского видим, что поток векторного поля через гладкую поверхность (нормаль внешняя), ограничивающую тело, равен нулю. Действительно, если $\vec{F}$ – соленоидальное поле, а ограничивающая тело V поверхность S удовлетворяет теореме Гаусса – Остроградского, то

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) dx dy dz = 0.$$

Пусть поле $\vec{F}$ соленоидальное. Возьмём векторную трубку и с двух сторон ограничим её часть сечениями S_1 и S_2 . Пусть S боковая поверхность этой трубки. Будем считать все поверхности кусочно-гладкими, а тогда множество $S_1 \cup S_2 \cup S$ также является кусочно-гладкой поверхностью, ограничивающей некоторое тело V (см. рисунок). Поток через

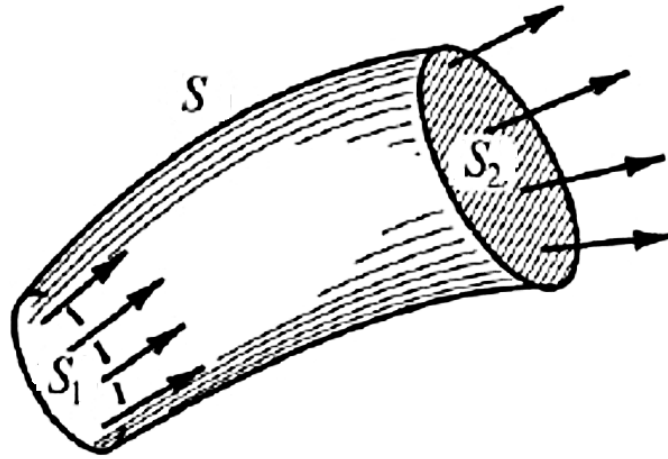


Рис. 5: Отрезок векторной трубки.

получившуюся замкнутую поверхность равен нулю (берётся внешняя нормаль). При этом поток поля $\vec{F}$ через поверхность S равен нулю, так как на ней вектора поля $\vec{F}$ по определению векторной трубки являются касательными, то есть перпендикулярными внешней нормали. Тогда потоки через поверхности S_1 и S_2 компенсируют друг друга, то есть, используя аддитивность поверхностного интеграла и формулу Гаусса – Остроградского, получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS + \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow - \iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS. \end{aligned}$$

Если на поверхности S_1 изменить направление нормали и обозначить противоположную нормаль через $\vec{n}_1$ (опять см. рисунок выше), то получим равенство

$$\iint_{S_1} (\vec{F}, \vec{n}_1) dS = \iint_{S_2} (\vec{F}, \vec{n}) dS.$$

Таким образом, *потoki солeноидального векторного поля через сечения векторной трубки, с помощью которых образуется ограничивающая тело поверхность рассмотренного выше вида, равны*. Это свойство можно взять в качестве определения солeноидального поля в некоторой малой области, то есть локально поле, удовлетворяющее такому свойству, является солeноидальным. Это можно вывести из определения дивергенции через предел, если брать не сферы, а поверхности вида $S_1 \cup S_2 \cup S$. В литературе поток через любое сечение векторной трубки рассмотренного вида иногда называют *интенсивностью векторной трубки*. Описанное свойство солeноидального поля объясняет ещё одно его название, встречающееся в литературе – трубчатое. Само слово “солeноидальное” происходит от греческого слова “ $\sigma\lambda\epsilon\nu$ ”, что в переводе с греческого означает “трубка”.

В приложениях встречается задача, в которой требуется восстановить векторное поле, если известны его ротор и дивергенция (вихрь и расходимость). Мы не будем решать такую задачу, но укажем свойство любого гладкого векторного поля, заданного в области D , с помощью которого её можно решить. Это свойство также объяснит причину, по которой потенциальное и солeноидальное векторные поля выделяются в курсе векторного анализа. Для начала отметим, что *множество в $\mathbb{R}^3$ называется выпуклым, если любые две его точки можно соединить отрезком прямой, целиком лежащим в D* . Разумеется, для двумерного случая определение полностью аналогично. Отметим, что *если множество D является выпуклым компактом, то равенство дивергенции нулю означает, что векторное поле на D солeноидальное, а если D – выпуклая область, на которой задано векторное поле, причём ротор поля равен нулю, то такое поле является потенциальным*.

Предложение 3. Пусть векторное поле $\bar{F}$ задано на выпуклом компакте D и является гладким на этом компакте. Тогда на компакте D справедливо равенство

$$\bar{F} = \bar{A} + \bar{B},$$

где поле $\bar{A}$ потенциально на D , а поле $\bar{B}$ солeноидально на D .

Обсудим только *схему доказательства*. Раз мы хотим, чтобы поле $\bar{A}$ было потенциальным, то нам необходимо найти скалярное на D поле U , для которого поле $\bar{A}$ является градиентом. Раз $\bar{A} = \nabla U$, то $\bar{B} = \bar{F} - \nabla U$. Так как требуется, чтобы поле $\bar{B}$ было солeноидальным на выпуклом компакте D , то

$$0 = \operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} \bar{F} - \operatorname{div}(\nabla U),$$

где

$$\operatorname{div}(\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U,$$

где Δ – это обозначение *оператора Лапласа*. Таким образом, поиск U сводится к решению дифференциального уравнения

$$\Delta U = \operatorname{div} \bar{F},$$

которое, как можно доказать, всегда имеет решение. Доказывать этот факт мы не будем.