Элементы векторного анализа-1

Скалярные поля и градиенты

Определение 1. *Пусть D – множество в $\mathbb{R}^3$. Отображение $U : D \to \mathbb{R}$ называется* ***скалярным полем*** *на множестве D, а отображение $\bar{F} : D \to \mathbb{R}^3$, задаваемое координатными функциями $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$, называется векторным полем на D. Скалярные и векторные поля могут быть определены и для множества $D \subset \mathbb{R}^2$, причём в этом случае векторное поле задаётся двумя координатными функциями P и Q. Если скалярное поле непрерывно дифференцируемо во всех точках множества D (то есть сама функция U и все её частные производные непрерывны), то скалярное поле называется* ***гладким****. Векторное поле $\bar{F}$ называется гладким, если каждая из его координатных функций гладкая на множестве D.*

Мы будем рассматривать гладкие скалярные и векторные поля, если специально не оговорено противное. В качестве множества D чаще всего будем брать область, то есть связное открытое множество.

Остановимся подробнее на скалярных полях и связанных с ними понятиях. Примерами таких полей могут служить температура в каждой точке рассматриваемого множества D или расстояние от рассматриваемой точки D до какой-то выделенной точки.

Определение 2. *Множество всех точек $M \in D$, таких, что $U(M)$ равно одному и тому же числу C, называется* ***поверхностью C-уровня*** *скалярного поля U.*

Приведём пример.

Пример 1. *Пусть $D = \mathbb{R}^3$, а поле U задаётся следующей формулой*

$$U(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Тогда при $C > 0$ поверхностями C-уровня будут однополостные гиперболоиды вращения, удовлетворяющие уравнениям $x^2+y^2-z^2 = C$, при $C = 0$ поверхностью 0-уровня (то есть множеством точек, в каждой из которых U принимает нулевое значение) будет конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, а при $C < 0$ поверхностями уровня будут двуполостные гиперболоиды, удовлетворяющие уравнениям $x^2 + y^2 - z^2 = C$ (см. рисунок).

В случае скалярных полей на $D \subset \mathbb{R}^2$ речь идёт о линиях уровней. Для примера изобразите линии уровня скалярного поля $U(x, y) = x^2 - y^2$ в качестве упражнения.

Определение 3. *Вектор* $\mathrm{grad} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$, *называется* ***вектором градиента*** *скалярного поля U.*

Ирландский математик Уильям Гамильтон ввёл символический вектор, названный им "набла" и обозначаемый ∇, который имеет вид

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Формальное умножение вектора ∇ на скалярное поле U приводит к равенству

$$\nabla U = \mathrm{grad} U,$$

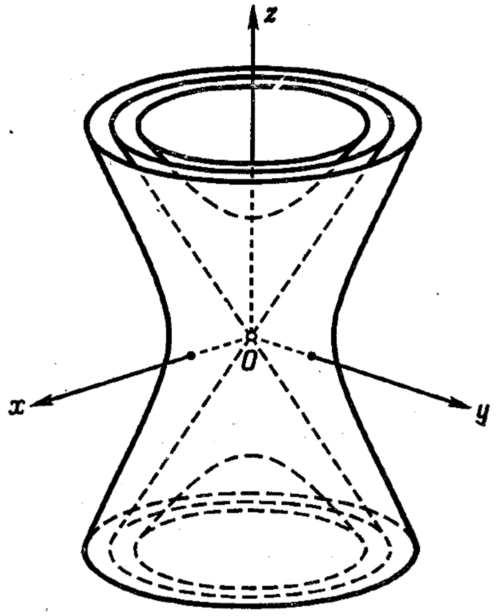

Рис. 1: Поверхности C-уровня при C разных знаков.

поэтому мы в дальнейшем будем использовать обозначение обозначение ∇U для градиента.

Если хотят подчеркнуть, что градиент берётся в конкретной точке $M \in D$, то пишут $\nabla U(M)$ или $\mathrm{grad} U(M)$.

Данное выше определение градиента имеет недостаток, так как определяется с помощью уже заданной системы координат. Отсюда возникает вопрос, не может ли поменяться этот вектор, если рассматривать другую систему координат. Сейчас мы проверим, что градиент не зависит от системы координат.

Для этого дадим определение производной по направлению скалярного поля U. *Направлением* в $\mathbb{R}^3$ будем называть любой единичный вектор $\bar{l}$. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что такой вектор может быть задан с помощью своих направляющих косинусов, то есть
$$\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Определение 4. *Если существует предел*
$$\lim_{t\to 0} \frac{U(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - U(x_0, y_0, z_0)}{t},$$
то он называется ***производной по направлению*** $\bar{l}$ *скалярного поля* U, *взятой в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$. *Обозначается этот предел* $\frac{\partial U}{\partial \bar{l}}(M_0)$.

Из курса анализа второго семестра мы знаем, что производную по направлению в случае наличия непрерывных частных производных можно посчитать следующим образом:
$$\frac{\partial U}{\partial \bar{l}}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\cdot\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\cdot\cos\gamma.$$

В выражении справа легко увидеть скалярное произведение направления $\bar{l}$ и градиента $\nabla U(M_0)$, откуда имеем, используя неравенство Коши – Буняковского:
$$\frac{\partial U}{\partial \bar{l}}(M_0) = (\nabla U(M_0), \bar{l}) \leq |\nabla U(M_0)|.$$

Мы знаем, что равенство достигается, если вектора $\bar{l}$ и $\nabla U(M_0)$ сонаправлены, причём значение производной как раз равно длине вектора градиента. Таким образом, производная скалярного поля по направлению принимает наибольшее значение в направлении, задаваемом градиентом. Это свойство градиента и можно взять в качестве определения этого вектора, причём такое определение уже не будет зависеть от введённой системы координат. Итак, *градиентом скалярного поля U в точке M_0 называется вектор, по направлению которого производная U в точке M_0 принимает наибольшее значение, причём это наибольшее значение равно длине градиента.*

Пример 2. *Снова рассмотрим скалярное поле*

$$U(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Построим касательные плоскости к поверхностям C-уровня этого поля. Пусть

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - C,$$

тогда касательная плоскость к поверхности уровня $x^2+y^2-z^2 = C$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в которой $F'_z(M_0) \neq 0$, вычисляется по формуле:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

что в нашем случае даёт такое уравнение касательной плоскости:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0.$$

С другой стороны,

$$\nabla U(m_0) = \{2x_0, 2y_0, -2z_0\},$$

то есть градиент $\nabla U(m_0)$ является нормальным вектором к поверхности уровня в точке M_0.

Факт,отмеченный в конце последнего примера справедлив и в общем случае, так как если $F(x, y, z) = 0$ – поверхность C-уровня скалярного поля U, то во всех точках множества D справедливы равенства

$$F'_x = U'_x,\ F'_y = U'_y,\ F'_z = U'_z,$$

то есть *градиент скалярного поля в точке является нормальным вектором к поверхности уровня в этой точке.*

Отметим несколько свойств градиента.

Предложение 1. *Пусть U и V – два гладких поля на множестве $D \subset \mathbb{R}^3$. Тогда:*

1) *при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\nabla(\alpha U + \beta V) = \alpha \nabla U + \beta \nabla V$;*

2) $\nabla(U \cdot V) = V \nabla U + U \nabla V$;

3) *если поле V не принимает нулевых значений на D, то*

$$\nabla(U/V) = \frac{V \nabla U - U \nabla V}{V^2};$$

4) *если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, то*

$$\nabla f(U) = f'(U) \nabla U.$$

Доказательство. Для примера докажем свойство 3.

Имеем следующие равенства для компонент $\nabla(U/V)$:

$$(U/V)'_x = \frac{VU'_x - UV'_x}{V^2},\ (U/V)'_y = \frac{VU'_y - UV'_y}{V^2},\ (U/V)'_z = \frac{VU'_z - UV'_z}{V^2}.$$

Тогда

$$\nabla(U/V) = \frac{1}{V^2}\{VU'_x - UV'_x, VU'_y - UV'_y, VU'_z - UV'_z\} = \\ = \frac{1}{V^2}(V\{U'_x, U'_y, U'_z\} - U\{V'_x, V'_y, V'_z\}) = \frac{1}{V^2}(V\nabla U - U\nabla V).$$

Остальные свойства проверяются аналогично. □

Таким образом, любое скалярное поле U порождает векторное поле градиента, который в каждой точке множества D указывает направление наискорейшего роста скалярного поля U. Например, если U – это поле температур, то градиент в точке указывает, в каком направлении от этой точке температура растёт быстрее всего.

Перейдём к рассмотрению векторных полей.

Векторные поля и векторные трубки

Определение 5. ***Силовой или векторной линией*** *векторного поля $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ на множестве D называется кривая L, содержащаяся в D, в каждой точке M которой вектор $\bar{F}(M)$ является касательным к L.*

Если ни в одной точке множества D векторное поле $\bar{F}$ не обращается в нулевой вектор и является гладким, то с помощью фактов из теории обыкновенных дифференциальных уравнений можно доказать, что силовые линии могут быть найдены из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Эти уравнения можно получить, например, так. Пусть кривая L задана параметрически, то есть с помощью дифференцируемых функций $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, причём t берётся из некоторого промежутка (a, b). Тогда касательный вектор к L имеет координаты $x'(t),\ y'(t)$ и $z'(t)$. Равенства

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R}$$

означают, что касательный вектор и вектор $\bar{F}$ пропорциональны. Если, нестрого говоря, умножить эти равенства на dt, то мы и приходим к системе дифференциальных уравнений, задающей силовые линии.

Мы не будем подробно останавливаться на этом, но ниже приведём пример.

Если выбрать какую-либо гладкую кривую l в D и провести через каждую её точку векторную линию, то получим поверхность, которую будем называть *векторной поверхностью.* Саму кривую, через каждую точку которой проходит векторная линия, назовём *направляющей кривой.* Можем считать, что в каждой точке l векторное поле $\bar{F}$ не является касательным к l. Так как кривая l гладкая, то у неё в каждой точке есть ненулевой касательный вектор $\vec{p}$, который вместе с вектором $\bar{F}$ задаёт базис плоскости, являющейся касательной к векторной поверхности (см. рисунок). Таким образом, *в каждой точке*

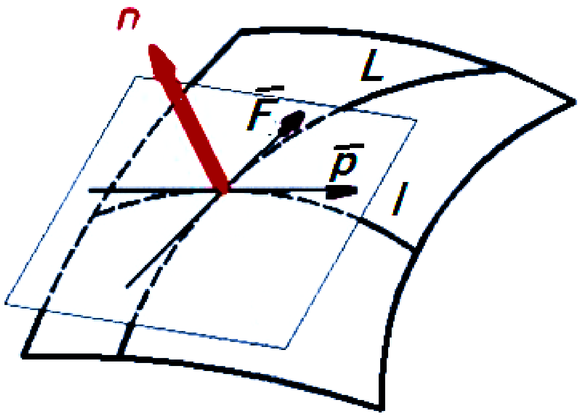

Рис. 2: Касательная плоскость к векторной поверхности.

векторной поверхности векторное поле лежит в касательной плоскости к этой поверхности. Это свойство также можно использовать в качестве определения векторной поверхности. Кривую l можно считать и кусочно-гладкой, а полученную проведением через её точки векторных линий поверхность также будем называть векторной поверхностью.

Если кривая l замкнута, то векторная поверхность с такой направляющей кривой называется *векторной трубкой* (см. рисунок).

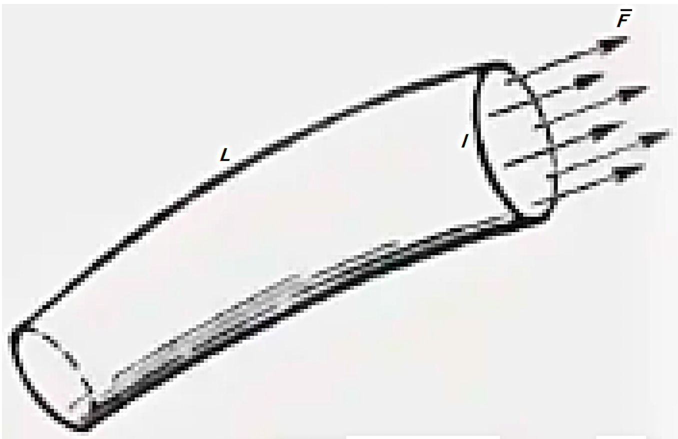

Рис. 3: Векторная трубка.

Пример 3. *Пусть в трёхмерном пространстве фиксирована точка O и каждой точке M поставлен в соответствие вектор $\overline{OM}$. Если ввести ортонормированную систему координат с началом в точке O, то точка M получит координаты (x, y, z). Тем самым на $\mathbb{R}^3$ можно задать векторное поле радиус-векторов, то есть в точке M имеем*

$$P(M) = x,\ Q(M) = y,\ R(M) = z.$$

Это поле обычно обозначают не $\bar{F}$, а $\bar{r}$, так как такое обозначение радиус-вектора наиболее часто встречается. Пусть направляющая кривая l задана параметрически уравнениями $x = a\cos t, y = a\sin t, z = c$ $(a, c > 0)$. Выясним, какой поверхностью является векторная трубка, задаваемая направляющей кривой l. Для этого прежде всего найдём векторные линии. Их можно просто “угадать”. Действительно, если рассмотреть любую прямую в $\mathbb{R}^3$, проходящую через начало координат, то радиус-вектор $\bar{r}$ любой точки этой прямой будет являться её направляющим вектором, то есть и будет касательным вектором. Таким образом, векторные линии поля $\bar{r}$ являются прямые, проходящие через начало координат.

Если эти векторные линии искать с помощью системы уравнений, задающей векторные линии, то получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

откуда $x = C_1 y,\ \ y = C_2 z$, *то есть получаем систему уравнений*

$$x = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_1/C_2},$$

которая является каноническим уравнением прямой, проходящей через начало координат, а C_1 *и* C_2 *– постоянные.*

Кривая l *является окружностью радиуса* a *с центром в точке* $(0, 0, c)$, *лежащей в плоскости* $z = c$. *Таким образом, мы должны рассмотреть все прямые с общей точкой в начале координат, пересекающие эту окружность. Очевидно, что векторная трубка тогда будет конусом, образованным всеми такими прямыми (полезно сделать рисунок).*